

Separation der Variablen

Beispiel 1: $(x^2 + 1) \gamma'(x) + \gamma^2(x) = 0$, $\gamma_0 = \gamma(0) = 1$

$$\Rightarrow (x^2 + 1) \frac{d\gamma}{dx} + \gamma^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\gamma}{dx} = - \frac{\gamma^2}{x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\gamma^2} d\gamma = - \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\gamma^2} d\gamma = - \int \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\gamma} = - \arctan(x) + C$$

$$\Rightarrow \gamma(x) = \frac{1}{\arctan(x) + C}$$

Wir setzen die Anfangsbedingung ein:

$$\gamma(0) = \frac{1}{\underbrace{\arctan(0)}_{=0} + C} = 1 \Rightarrow C = 1$$

Die Lösung ist also gegeben durch

$$\gamma(x) = \frac{1}{\arctan(x) + 1}$$

Beispiel 1: (formal korrektere Lösung)

$$(x^2 + 1) f'(x) + f^2(x) = 0, \quad f(0) = 1$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{f^2(x)}{x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f^2(x)} \cdot f'(x) = -\frac{1}{x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{f^2(x)} \cdot f'(x) dx = -\int \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{y^2} dy = -\int \frac{1}{x^2 + 1} dx \quad \left(\begin{array}{l} y = f(x) \\ dy = f'(x) dx \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{y} = -\arctan(x) + C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -\arctan(x) + C$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\arctan(x) + C}$$

und ganz analog folgt nun mit der Anfangsbedingung

$$f(x) = \frac{1}{\arctan(x) + 1}$$

Beispiel 2:

Gesucht ist $\gamma: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$

$$\gamma'(x) + x \tan(\gamma(x)) = 0$$

$$\gamma(0) = \frac{\pi}{2}$$

Wir können die Gleichung umformen zu

$$\frac{dy}{dx} = -x \tan y$$

und bemerken, dass wir die Variablen trennen können:

$$\frac{1}{\tan y} dy = -x dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\tan y} dy = -\int x dx$$

$$= \int \frac{\cos y}{\sin y} dy = \int \frac{1}{s} ds$$

$$\left(\begin{array}{l} s = \sin y \\ ds = \cos y dy \end{array} \right)$$

$$= \log |s| + C = \log |\sin y| + C$$

$$\Rightarrow \log |\sin y| = -\frac{1}{2} x^2 + C$$

$$\Rightarrow |\sin y| = \underbrace{\exp(C)}_{=: \pm A} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} x^2\right)$$

$$\Rightarrow \sin y = A \exp\left(-\frac{1}{2} x^2\right)$$

Setzen wir noch die Anfangsbedingung ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\sin(\gamma(0)) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\ &= A \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot 0^2\right) = A\end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = 1$$

$$\Rightarrow \sin(\gamma) = \exp\left(-\frac{1}{2} x^2\right)$$

$$\Rightarrow \gamma = \arcsin\left(\exp\left(-\frac{1}{2} x^2\right)\right)$$