

Rationale Funktionen

$\frac{p(x)}{q(x)}$ - Polynom

$q(x)$ - Polynom

Beispiel: $\frac{x^3 - 2x}{x^2 + 2x + 1}$

Elementare Integrale:

$$\int \frac{1}{x} dx = \log x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \operatorname{artanh} x + C$$

Falls $\operatorname{Grad}(p) < \operatorname{Grad}(q)$: Partialbruchzerlegung

Beispiel: $\int \frac{1}{x^2 + x} dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 + x} dx &= \int \frac{1}{x(x+1)} dx \\ &\stackrel{\text{Partialbruch-zerlegung}}{=} \int \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} dx \\ &= \log x - \log(x+1) + C \end{aligned}$$

Falls $\operatorname{Grad}(p) \geq \operatorname{Grad}(q)$: Polynomdivision

Beispiel: $\int \frac{x^4}{x^2 + 1} dx$

Polynomdivision $x^4 : (x^2 + 1)$ gibt uns
 $x^4 = (x^2 + 1)(x^2 - 1) + 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \frac{x^4}{x^2 + 1} dx &= \int \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 1) + 1}{x^2 + 1} dx \\ &= \int x^2 - 1 + \frac{1}{x^2 + 1} dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 - x + \arctan(x) + C \end{aligned}$$

Partielle Integration

$$\int f' \cdot g = f \cdot g - \int f \cdot g'$$

Die partielle Integration lässt uns also eine Ableitung im Produkt auf den anderen Faktor zu „übertragen“.

Wahl von f und g :

Es ist nicht offensichtlich, wie wir f oder g wählen sollen.

$\log x$, $\arcsin x$, $\arctan x$, $\operatorname{arctanh} x \dots$

Wählt man diese Funktionen als g , erhält man Brüche, die häufig einfacher zu integrieren sind.

Beispiel: $\int x \arctan x \, dx$

$$\int \underbrace{x}_{f'} \underbrace{\arctan x}_{g} \, dx$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}(x^2+1)}_f \underbrace{\arctan x}_g$$

$$- \int \frac{1}{2} \cancel{(x^2+1)} \cdot \frac{1}{\cancel{x^2+1}} \, dx$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+1) \arctan x - \frac{1}{2}x + C$$

Der Trick 1. $f(x)$

Wir können f' als 1 wählen

Beispiel:

$$\begin{aligned} \int \log x \, dx &= \int 1 \cdot \log x \, dx \\ &= x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= x \log x - x + C \end{aligned}$$

$x^n f(x)$, $f \in \{\sin, \cosh, \exp, \dots\}$

In diesem Fall können wir so lange Ableitungen von $x^n \rightsquigarrow f(x)$ „verschieben“, bis x^n verschwindet.

Beispiel:

$$\int \underbrace{x^2}_g \underbrace{\sinh x}_{f'} \, dx$$

$$= x^2 \cosh x - \int 2x \cosh x \, dx$$

$$= x^2 \cosh x - 2x \sinh x + 2 \cosh x + C$$

Integrale der Form $\int \cos^2$

Integrale von trigonometrischen und Exponentialfunktionen können sich wiederholen:

$$\begin{aligned} \int \cos^2 &= \sin \cdot \cos + \int \sin^2 \\ &= \sin \cdot \cos + \int 1 - \cos^2 \\ &= \sin \cdot \cos + p_1 - \int \cos^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int \cos^2 = \frac{1}{2} (\sin \cdot \cos + p_1)$$

Substitution

$$\int_{x_0}^{x_1} g(F(x)) F'(x) dx = \int_{F(x_0)}^{F(x_1)} g(y) dy$$

(1) (2)

Die Substitutionsregel gibt uns eine Regel, die uns Integrale in der Form (1) oder (2) in die jeweils andere Form zu bringen.

Integrale der Form (1):

Beispiel: $\int_e^3 \frac{1}{x \log x} dx$

Wir bemerken, dass $\log'(x) = \frac{1}{x}$

Also wählen wir $g(y) = \frac{1}{y}$, $F(x) = \log x$

$$\Rightarrow \int_e^3 \frac{1}{x \log x} dx = \int_e^{\log 3} \frac{1}{\log x} \log' x dx$$

$$= \int_1^{\log 3} \frac{1}{y} dy = [\log y]_{y=1}^{y=\log 3}$$

$$= \log(\log(3)) - \underbrace{\log(1)}_{=0}$$

Integrale der Form (2):

Integrale von Funktionen, die Verknüpfungen von simpleren Funktionen sind, können oft durch Substitution gelöst werden.

Beispiel: $\int_0^{\pi/2} \cos(\sqrt{y}) dy$

$\begin{cases} F(x) = x^2 \\ g(y) = \cos(\sqrt{y}) \end{cases}$

$$\int_0^{\pi/2} \cos(\sqrt{y}) dy = \int_0^{\pi} \cos(x) \cdot 2x dx$$

$\begin{cases} y = x^2 \\ dy = 2x dx \end{cases}$

dieses Integral können wir nun partiell integrieren

Trigonometrische Substitutionen (2):

Trigonometrische Funktionen sind oft nützlich. Insbesondere für Integrale, die Terme wie

$\frac{1}{1+x^2}$, $\sqrt{1-x^2}$ und ähnliche enthalten.

Beispiel: $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(y)}{\sqrt{1-\sin^2(y)}} \cos(y) dy$$

$\begin{cases} x = \sin(y) \\ dx = \cos(y) dy \end{cases}$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(y)}{\cos(y)} \cdot \cos(y) dy = [-\cos(y)]_{y=0}^{y=\pi/2}$$

= 1