

12.1

- a) Die Funktion f ist stetig und definiert auf einem kompakten Intervall. Sie besitzt gemäss Satz aus der Vorlesung also ein Maximum und ein Minimum. Das heisst, sie muss auch beschränkt sein.
Stetige, beschränkte Funktionen sind integrierbar. $\square$

$$b) \int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{4} 1^4 - \frac{1}{4} 0^4 = \frac{1}{4}$$

$$\int_0^1 x^k dx = \left[\frac{1}{k+1} x^{k+1} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{k+1} 1^{k+1} - \frac{1}{k+1} 0^{k+1} = \frac{1}{k+1}$$

$$\int_0^x e^y dy = \left[e^y \right]_{y=0}^{y=x} = e^x - e^0 = e^x - 1$$

$$\int_0^x \exp = \int_0^x e^y dy = e^x - 1$$

$$\int_x^0 \cos(y^2) y dy \quad \begin{aligned} t &= y^2 \\ dt &= 2y dy \end{aligned}$$

$$= \int_{x^2}^0 \cos t \cdot \frac{1}{2} dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[\sin t \right]_{t=x^2}^{t=0} = \frac{1}{2} (\sin(0) - \sin(x^2))$$

$$= -\frac{1}{2} \sin(x^2)$$

$$\int_0^1 e^{e^x} e^x dx = \int_1^e e^s ds$$

$$\begin{aligned} s &= e^x \\ ds &= e^x dx \end{aligned}$$

$$= \left[e^s \right]_{s=1}^{s=e} = (e^e - e^1)$$

$$= e^e - e$$

$$\int_0^1 (\exp \circ \exp) \exp = \int_0^1 e^{e^x} e^x dx = e^e - e$$

$$\int_1^x t^a dt = \int_1^x e^{\log(t)} \cdot a dt$$

$$= \int_0^{\log x} e^{s \cdot a} e^s ds$$

$$= \int_0^{\log x} e^{s \cdot (a+1)} ds$$

Falls $a \neq -1$:

$$= \int_0^{(a+1)\log x} \frac{1}{a+1} e^u du$$

$$= \frac{1}{a+1} \left[e^u \right]_{u=0}^{u=(a+1)\log x}$$

$$= \frac{1}{a+1} \left(e^{\log x (a+1)} - e^0 \right)$$

$$= \frac{1}{a+1} \left(x^{a+1} - 1 \right)$$

$$s = \log t \Rightarrow t = e^s$$

$$ds = \frac{1}{t} dt$$

$$\Rightarrow dt = t ds$$

$$\Rightarrow dt = e^s ds$$

$$u = s(a+1)$$

$$du = (a+1) ds$$

$$\Rightarrow ds = \frac{1}{a+1} du$$

Falls $a = -1$:

$$= \int_0^{\log x} 1 ds = \left[s \right]_{s=0}^{s=\log x} = \log x$$

c) $\int \exp = \exp + c$, $c \in \mathbb{R}$

Sei $p_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $p_a(x) := x^a$, $a \in [0, \infty[$

$\int p_a$ ist nicht wohldefiniert, da x^a für $x < 0$ nicht definiert ist

Fehler in der Aufgabenstellung?

Ebenso für das 2. Integral

$$\begin{aligned} \int (\exp + 2\cos) &= \int \exp + 2 \int \cos \quad (\text{Linearität}) \\ &= \exp + 2\sin + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{arsinh} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \operatorname{artanh} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

d) Nein, es fehlt noch die Integrationskonstante

e) Ja

f) Nein, die Integrationskonstante C kann in diesem Fall auf $(-\infty, 0)$ einen anderen Wert annehmen als auf $(0, \infty)$. Sie muss nur lokal konstant sein.

12.2

$$\begin{aligned}\int x^k e^{-x} dx &= -x^k e^{-x} + k \int x^{k-1} e^{-x} dx \\&= -x^k e^{-x} - k x^{k-1} e^{-x} + k(k-1) \int x^{k-2} e^{-x} dx \\&= -\left(x^k + k x^{k-1} + k(k-1) x^{k-2} + \dots\right) e^{-x} + c \\&= -\left(\sum_{i=0}^k \frac{k!}{(k-i)!} x^{k-i}\right) e^{-x} + c\end{aligned}$$

Das ist unsere Vermutung. Jetzt der Beweis:

Induktionsverankerung: $k=0$

$$\begin{aligned}\int x^0 e^{-x} dx &= \int e^{-x} dx = -e^{-x} + c \\&= -\left(\sum_{i=0}^0 \frac{0!}{(0-i)!} x^{0-i}\right) e^{-x} + c = -x^0 e^{-x} + c = -e^{-x} + c\end{aligned}$$

Induktionsschritt:

Wir nehmen an, für fixies $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\int x^k e^{-x} dx = -\left(\sum_{i=0}^k \frac{k!}{(k-i)!} x^{k-i}\right) e^{-x} + c$$

$$\Rightarrow \int x^{k+1} e^{-x} dx = -x^{k+1} e^{-x} + (k+1) \int x^k e^{-x} dx$$

$$\begin{aligned}&= -x^{k+1} e^{-x} - (k+1) \left(\sum_{i=0}^k \frac{k!}{(k-i)!} x^{k-i}\right) e^{-x} + c \\&= -\frac{(k+1)!}{(k+1)!} x^{k+1} e^{-x} - \sum_{i=0}^k \frac{(k+1)!}{(k-i)!} x^{k-i} e^{-x} + c\end{aligned}$$

$$= -\frac{(k+1)!}{(k+1)!} x^{k+1} e^{-x} - \left(\sum_{l=1}^{k+1} \frac{(k+1)!}{(k+1-l)!} x^{k+1-l} \right) e^{-x} + C$$

$$= - \left(\sum_{l=0}^{k+1} \frac{(k+1)!}{(k+1-l)!} x^{k+1-l} \right) e^{-x} + C \quad \square$$

$$\int \log = \int \log x \, dx = \int 1 \cdot \log x \, dx$$

$$= x \cdot \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$= x \cdot \log x - \int 1 \, dx$$

$$= x \cdot \log x - x + C = x(\log x - 1) + C$$

$$\int_1^2 \log x \, dx = \left[x \cdot (\log x - 1) \right]_{x=1}^{x=2}$$

$$= 2(\log 2 - 1) - 1 \cdot (\log 1 - 1)$$

$$= 2 \log 2 - 2 - 1 \cdot 0 + 1$$

$$= 2 \log 2 - 1$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m+1} &= \left[\sin \cdot \cos^{2m} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2m \sin^2 \cos^{2m-1} \\
 &= + 2m \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2) \cos^{2m-1} \\
 &= 2m \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m+1} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m-1} \right)
 \end{aligned}$$

Wir definieren $I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m+1}$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow I_m &= 2m (I_m + I_{m-1}) \\
 &= 2m I_m + 2m I_{m-1}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (2m+1) I_m = 2m I_{m-1}$$

$$\Rightarrow I_m = \frac{2m}{2m+1} I_{m-1}$$

Wir haben also eine Rekursionsformel gefunden.
Berechnen wir nun I_0 :

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos = [\sin]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

Es folgt also:

$$I_m = \prod_{k=1}^m \frac{2k}{2k+1}$$

12.3

$$1. D_c \circ \int_c = \text{id}_{C(I)}$$

Sei $f \in C(I)$ beliebig

f ist stetig, $c \in I$ und wir betrachten ein beliebiges $x \in I$

$\Rightarrow f|_{[c,x]}$ ist stetig und beschränkt, also Riemann-integrierbar

Wir definieren $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ als

$$F := \int_c^x (f)$$
$$(F(x) = \int_c^x f(t) dt)$$

Diese Funktion existiert, da $f|_{[c,x]}$ Riemann-integrierbar ist.

$F(c) = 0$ und der 1. Hauptsatz sagt, dass F eine Stammfunktion von f ist.

$$\Rightarrow F' = f$$

Das heisst ausserdem, dass $F \in C^1(I; \mathbb{R})$

$$\text{Es folgt also } D_c \left(\int_c (f) \right) = D_c(F) = F' = f$$

$$\Rightarrow D_c \circ \int_c = \text{id}_{C(I)} \quad \square$$

$$2. \int_c \circ D_c = \text{id}_{C^1(I; c)}$$

Sei $F \in C^1(I; c)$ beliebig

Wir können also $f := F'$ finden, wobei $f \in C(I)$

F ist also eine Stammfunktion von f , gemäss 2. Hauptsatz folgt

$$\int_c^x f = F(x) - \underbrace{F(c)}_{=0} = F(x)$$

$$\begin{aligned} \text{Es gilt also } \int_c \circ D_c(F) &= \int_c (F') = \int_c (f) \\ &= F \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_c \circ D_c = \text{id}_{C^1(I; c)}$$

12.4

$$2C_{loc} = C_{loc} \quad (1)$$

Beweis:

Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig

$$c \cdot C_{loc} = c \cdot 0 + C_{loc} = C_{loc}$$

Wir haben verwendet, dass

$$\forall \mathcal{F} \in V \quad \forall F \in F \quad c\mathcal{F} = cF + C_{loc}$$

wobei wir $\mathcal{F} = C_{loc}$ und $F = 0$ gewählt haben

$$C_{loc} + C_{loc} = C_{loc} \quad (2)$$

Beweis:

$$C_{loc} + C_{loc} = (0 + 0) + C_{loc} = C_{loc}$$

Wir haben verwendet, dass

$$\forall \mathcal{F}, \mathcal{G} \in V \quad \forall F \in \mathcal{F} \quad \forall G \in \mathcal{G}$$

$$\mathcal{F} + \mathcal{G} = (F + G) + C_{loc}$$

wobei wir $\mathcal{F} = C_{loc}$, $\mathcal{G} = C_{loc}$, $F = 0$ und $G = 0$ gewählt haben.

$$C_{loc} - C_{loc} := C_{loc} + (-1)C_{loc}$$

$$= C_{loc} + C_{loc} \quad (1)$$

$$= C_{loc} \quad (2)$$

$$(exp + C_{loc}) + (cos + C_{loc})$$

$$= (exp + cos) + (C_{loc} + C_{loc}) \quad (\text{Assoziativität})$$

$$= (exp + cos) + C_{loc} \quad (2)$$