

Bestimme die Extremalstellen von

$$f(x) := \frac{1}{x^2 + 2x + 2}, \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$x^2 + 2x + 2$ hat keine reellen Nullstellen:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 2 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} \\ &= -1 \pm i \end{aligned}$$

f ist also auf ganz $\mathbb{R}$ definiert

f ist ausserdem auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar, also müsssen alle Extremalstellen von f an kritischen Punkten sein.

Wir bestimmen also die kritischen Punkte:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(x^2 + 2x + 2)^2} \cdot (2x + 2) \\ &= \frac{-2(x+1)}{(x^2 + 2x + 2)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

-1 ist also der einzige kritische Punkt von f

Da f zweimal differenzierbar ist, können wir anhand der 2. Ableitung bestimmen, ob f eine lokale Minimal- oder Maximalstelle ist

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-2(x^2 + 2x + 2)^{-2} + 2(x+1) \cdot 2(x^2 + 2x + 2)^{-3} \cdot (2x + 2)}{(x^2 + 2x + 2)^4} \\ &= \frac{-2x^2 - 4x - 4 + 8x^2 + 16x + 8}{(x^2 + 2x + 2)^3} \\ &= \frac{6x^2 + 12x + 4}{(x^2 + 2x + 2)^3} \end{aligned}$$

$$f''(-1) = \frac{6 - 12 + 4}{(1 - 2 + 2)^3} = -2 < 0$$

Also ist $x = -1$ eine Maximalstelle (lokal)

Man könnte jetzt noch zeigen, dass es eine globale Maximalstelle ist:

$$f(-1) - f(x) = \frac{1}{1 - 2 + 2} - \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$$

$$= 1 - \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x + 2 - 1}{x^2 + 2x + 2}$$

$$= \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2 + 1}$$

$$\geq 0 \quad (\text{da sowohl Zähler als auch Nenner} \geq 0)$$

Es folgt also $f(-1) \geq f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also dass $x = -1$ ein globales Maximum von f ist.

Bestimme die Extremalstellen von

$$f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := (x-1)^2 e^x$$

Lösung:

Wir bestimmen zuerst die Ableitungen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x-1)e^x + (x-1)^2 e^x \\ &= (2 + (x-1))(x-1)e^x \\ &= (x-1)(x+1)e^x = (x^2 - 1)e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2xe^x + (x^2 - 1)e^x \\ &= (x^2 + 2x - 1)e^x \end{aligned}$$

Und dann die kritischen Punkte:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow (x-1)(x+1)e^x = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \{-1, 1\} \end{aligned}$$

Die kritischen Punkte sind also -1 und 1

Um die Extremalstellen zu finden müssen wir

- kritische Punkte
- Punkte, wo f nicht differenzierbar ist
- Punkte auf dem Rand des Definitionsbereichs

betrachten.

Es kommen also die Punkte $\{-2, -1, 1, 2\}$ als Extremalstellen in Frage

Punkt $x = -2$:

$$f(-2) = 9e^{-2}$$

$$f'(-2) = 3e^{-2} > 0$$

Da f' stetig ist, gibt es eine Umgebung um -2 , wo $f' > 0$, also f monoton wachsend ist.
 $\Rightarrow -2$ ist eine lokale Minimalstelle

Punkt $x = -1$:

$$f(-1) = 4e^{-1}$$

$$f'(-1) = 0$$

$$f''(-1) = -2e^{-1} < 0$$

$\Rightarrow -1$ ist also eine lokale Maximalstelle

Punkt $x = 1$:

$$f(1) = 0$$

$$f'(1) = 0$$

$$f''(1) = 2e > 0$$

$\Rightarrow 1$ ist also eine lokale Minimalstelle

Punkt $x = 2$:

$$f(2) = e^2$$

$$f'(2) = 3e^2 > 0$$

Nach derselben Überlegung wie für $x = -2$ folgt, dass 2 eine lokale Maximalstelle ist.

f ist stetig auf einem kompakten Definitionsbereich, also können wir globale Extremalstellen bestimmen:

globales Maximum:

Es kommen $x = -1$ und $x = 2$ in Frage

$$f(-1) = 4e^{-1}, \quad f(2) = e^2$$

$f(2) > f(-1)$, also ist $x = 2$ die globale Maximalstelle.

globales Minimum:

Es kommen $x = -2$ und $x = 1$ in Frage

$$f(-2) = 3e^{-2}, \quad f(1) = 0$$

$f(1) < f(-2)$, also ist $x = 1$ die globale Minimalstelle.