

Serie 11

11.1 Siehe Lösungen zu Serie 10

11.2

$$f: \left[-\frac{3}{2}, 3\right] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 - 3x$$

b) $f'(x) = 3x^2 - 3$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \{-1, 1\}$$

c) f ist eine stetige Funktion auf kompaktem Definitionsbereich, also hat f globales Minimum / Maximum.

d) f ist differenzierbar, also folgt aus dem Satz von Fermat, dass alle Extremalstellen im Inneren von f kritische Punkte sind.

Zusätzlich müssen wir die Punkte am Rand betrachten.

Es kommen also $\left\{-\frac{3}{2}, -1, 1, \frac{3}{2}\right\}$ in Frage

$$f''(x) = 6x$$

Punkt $-\frac{3}{2}$:

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8} - 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{-27 + 36}{8} = \frac{9}{8}$$

$$f'\left(-\frac{3}{2}\right) = 3 \cdot \left(\frac{9}{4}\right) - 3 = \frac{27}{4} - \frac{12}{4} = \frac{15}{4} > 0$$

Da $f'\left(-\frac{3}{2}\right) > 0$ und f' stetig ist, ist f also monoton wachsend in einer Umgebung von $-\frac{3}{2}$.

$-\frac{3}{2}$ ist demnach ein lokales Minimum.

Punkt -1:

Wir betrachten f''

$f''(-1) = -6 < 0$, also ist $f(-1)$ ein lokales Maximum. $f(-1) = 2$

Punkt 1:

$f''(1) = 6 > 0 \Rightarrow f(1)$ ist lokales Minimum.
 $f(1) = -2$

Punkt 3:

$$f(3) = 18$$

$$f'(3) = 24 > 0$$

Da $f'(3) > 0$ und f' stetig, ist f monoton wachsend in einer Umgebung von 3.

$\Rightarrow 3$ ist ein lokales Maximum

Also ist $f(3) = 18$ das globale Maximum
und $f(1) = -2$ das globale Minimum von f .

$$f) \quad x_0 = 3, \quad f'(x_0) = 24 \neq 0$$

Das ist kein Widerspruch zum Satz von Fermat, der lediglich eine Aussage über Punkte im Innern des Definitionsbereichs macht.

11.2 g) $g: [-2, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) := x^3 + x^2 - x$

$$g'(x) = 3x^2 + 2x - 1$$

$$g''(x) = 6x + 2$$

Kritische Punkte:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3}$$

$$= \frac{-2 \pm 4}{2 \cdot 3}$$

$$= \frac{-1 \pm 2}{3}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{-1, \frac{1}{3}\right\}$$

Kandidaten für Extremalstellen: $\{-2, -1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}$

$$g(-2) = -8 + 4 + 2 = -2$$

$$g(-1) = -1 + 1 + 1 = 1$$

$$g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} = \frac{1 + 3 - 9}{27} = -\frac{5}{27}$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1 + 2 - 4}{8} = -\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \text{Maximum: } g(-1) = 1$$

$$\text{Minimum: } g(-2) = -2$$

11.3 a/b) siehe Lösung von 11.2

c) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) := x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

g ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und $\mathbb{R}$ ist offen, also folgt aus dem Satz von Fermat, dass genau die kritischen Punkte Kandidaten für Extremstellen sind.

Kritische Punkte:

$$g'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

$$g''(x) = 6x - 6$$

$$\Rightarrow g''(1) = 0$$

Also müssen wir auch noch g''' anschauen

$$g'''(x) = 6 \neq 0$$

Es folgt aus dem Satz von Fermat, dass $g(1) = 0$ keine Extremalstelle ist.

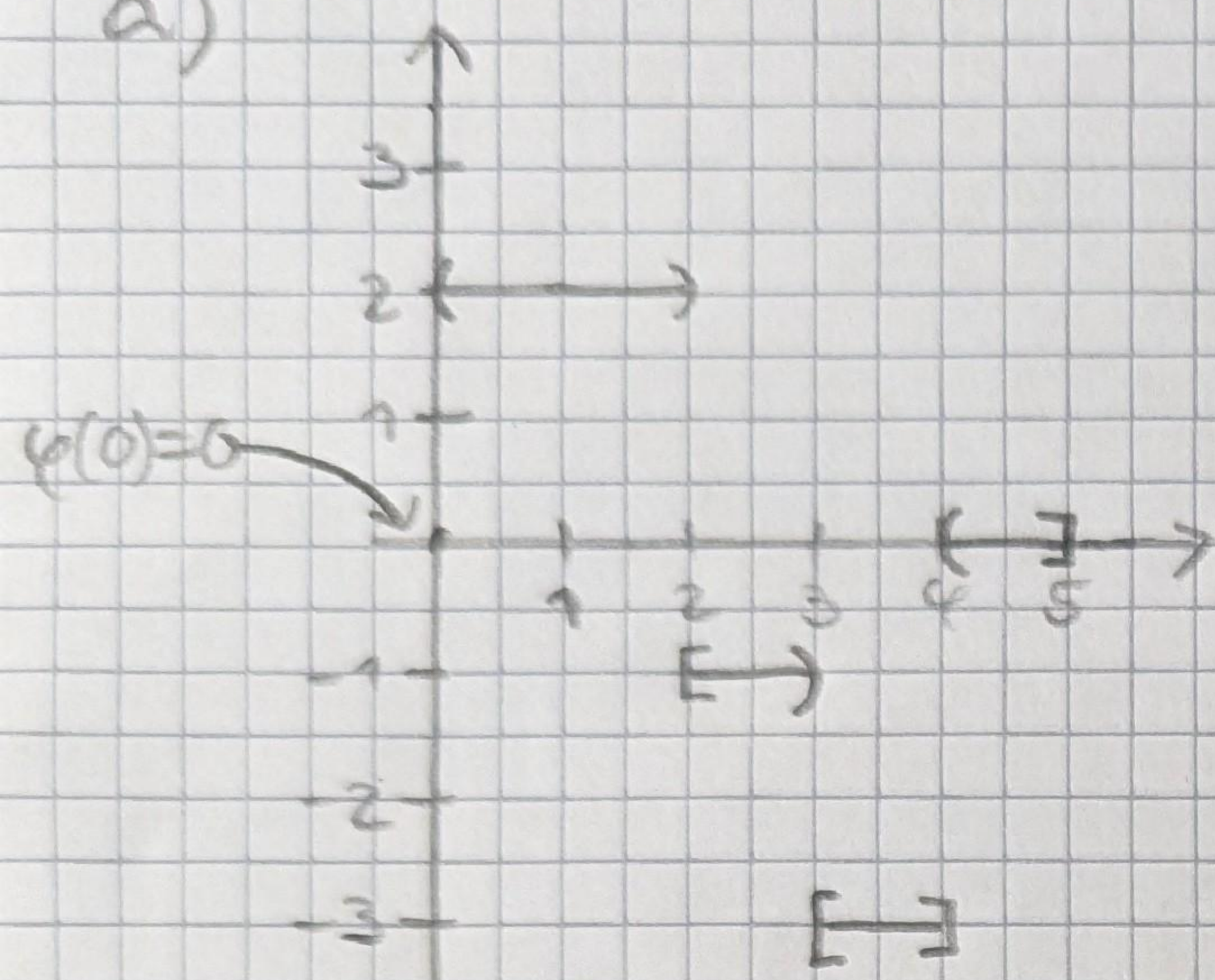
g besitzt also keine lokalen Extremalstellen

11.4

$$\varphi := 2X_{]0,3[} - 3X_{[2,4]}$$

$$\varphi: [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$$

a)



b) $\varphi(3) = -3$

$$\begin{aligned} \text{c) } S_I \varphi &= 2 \cdot |]0,3[| - 3 \cdot |[2,4]| \\ &= 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = \underline{\underline{0}} \end{aligned}$$

11.5

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := x^2$$

Wir definieren $\alpha_n := \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{i}{n} \right)^2 \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right[$

und $\beta_n := \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{i+1}{n} \right)^2 \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right[$

α_n und β_n sind Treppenfunktionen für alle $n \in \mathbb{N}$ und außerdem könnte man zeigen, dass $\forall x \in [0, 1]$

$$\alpha_n(x) \leq x^2 \leq \beta_n(x)$$

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} \alpha_n &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n^3} i^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n^3} i^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \left(\frac{(n-1)^3}{3} + \frac{(n-1)^2}{2} + \frac{n-1}{6} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} \beta_n &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n^3} (i+1)^2 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^3} k^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \right) \end{aligned}$$

$$\underline{\int}_{[0,1]} x^2 dx = \sup \left\{ \int_{[0,1]} f \mid f \text{ Treppenfunktion, } f(x) \leq x^2 \right\}$$

$$\geq \sup \left\{ \int_{[0,1]} a_n \mid n \in \mathbb{N} \right\} \quad (\text{da Teilmenge})$$

$$= \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{n^3} \left(\frac{(n-1)^3}{3} + \frac{(n-1)^2}{2} + \frac{n-1}{6} \right) \right\}$$

$$= \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{n^3} \left(\frac{n^3 - 3n^2 + 3n - 1}{3} + \frac{n^2 - 2n + 1}{2} + \frac{n-1}{6} \right) \right\}$$

$$= \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right\}$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$\overline{\int}_{[0,1]} x^2 dx = \inf \left\{ \int_{[0,1]} f \mid f \text{ Treppenfunktion, } f(x) \geq x^2 \right\}$$

$$\leq \inf \left\{ \int_{[0,1]} \beta_n \mid n \in \mathbb{N} \right\} \quad (\text{da Teilmenge})$$

$$= \inf_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{n^3} \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \right) \right\}$$

$$= \inf_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right\}$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \overline{\int}_{[0,1]} x^2 dx \leq \frac{1}{3} \leq \underline{\int}_{[0,1]} x^2 dx$$

$$\Rightarrow \int_{[0,1]} x^2 dx = \frac{1}{3} \quad (\text{und existiert}) \quad \square$$

11.6

a) $f := 2\chi_{]0,3[} - 3\chi_{[2,4]}$, $f: [0,5] \rightarrow \mathbb{R}$

Jede Treppenfunktion ist eigentlich Riemann-integrierbar mit

$$\begin{aligned}\int_{[0,5]} f &= 2 \cdot |\chi_{]0,3[}| - 3 \cdot |\chi_{[2,4]}| \\ &= 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = 0 \quad \square\end{aligned}$$

b) $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := -3x^2 + 2x$

$$\int_{[0,1]} x^2 dx = \frac{1}{3} \quad (\text{aus 11.5})$$

$$\int_{[0,1]} x dx = \frac{1}{2} \quad (\text{aus der Vorlesung})$$

Wir verwenden ausserdem die Linearität des Integrals um zu schliessen, dass

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]} f &= \int_{[0,1]} (-3x^2 + 2x) dx \\ &= -3 \int_{[0,1]} x^2 dx + 2 \int_{[0,1]} x dx \\ &= -3 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 0 \quad \square\end{aligned}$$

c) $f:]0,3[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ -\frac{1}{4}, & x > 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned}\int_0^3 f &= \int_0^1 x dx + \int_1^3 -\frac{1}{4} dx \\ &= \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 2 = 0 \quad \square\end{aligned}$$

11.6 d)

$$f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := e^{-x} \cos x$$

$$|e^{-x}| \leq 1, \quad |\cos x| \leq 1$$

$$\Rightarrow |f(x)| = |e^{-x} \cos x| \leq |e^{-x}| |\cos x| \leq 1 \cdot 1 = 1$$

$$\Rightarrow f(x) \leq 1$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} f(x) dx \leq \int_0^{2\pi} 1 dx = 2\pi$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} f(x) dx \leq 2\pi \quad \square$$

Die Funktion ist eigentlich Riemann-integrierbar, da sie stetig und beschränkt ist.

11.7

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall

Sei $c \in \mathbb{R}$

Seien $\varphi, \psi: I \rightarrow \mathbb{R}$ Treppenfunktionen

Das heisst, wir können φ und ψ wie folgt ausdrücken:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{I_k}(x), \quad \psi = \sum_{k=1}^m b_k \chi_{J_k}(x)$$

wobei $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, I_k, J_k beschränkte Intervalle

$$S_I(c\varphi) = c \sum_{k=1}^n a_k |I_k| = c S_I(\varphi)$$

$$S_I(\varphi + \psi) = \sum_{k=1}^n a_k |I_k| + \sum_{k=1}^m b_k |J_k| = S_I(\varphi) + S_I(\psi) \quad \square$$

11.8 $f: X \subset \mathbb{Q} \cap [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$

Sei φ eine Treppenfunktion, für die gilt $\varphi \leq f$.

Wir nehmen widerspruchswise an, dass es $x \in [0,1]$ gibt, sodass $\varphi > 0$ in einer Umgebung U von x .

Es gibt also ein Intervall $I \subseteq U$, sodass $\varphi > 0$ auf I .
 $\Rightarrow f > 0$ auf I

Es gibt ausserdem in jedem Intervall eine irrationale Zahl r .

$$\Rightarrow \exists r \in I \quad f(r) = 0 \quad \downarrow$$

Es gibt also kein $x \in [0,1]$, sodass $\varphi > 0$ in einer Umgebung von x .

$\Rightarrow \varphi \leq 0$ bis auf abzählbar viele Punkte

$$\Rightarrow \int_{[0,1]} \varphi \leq 0$$

Da wir nichts über φ angenommen haben, ausser dass $\varphi \leq f$ und dass φ eine Treppenfunktion ist, gilt $\int_{[0,1]} \varphi \leq 0$ für jedes φ , also auch für das Supremum all dieser Treppenfunktionen

$$\Rightarrow \int_{[0,1]} f \leq 0$$

Ganz analog folgt $\int_{[0,1]} f \geq 1$

$\Rightarrow f$ ist nicht Riemann-integrierbar $\square$