

Zeige, dass die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := x e^x$$

1. in $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist

2. in $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist

3. glatt, also in $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist.

Tipp für (3.):

Zeige, dass $f^{(k)}(x) = (x+k) e^x$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Verwende dafür vollständige Induktion.

Argumentiere dann, dass $f^{(k)}$ differenzierbar sein muss.

Lösung:

1. f ist differenzierbar (Produktregel)

und

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot e^x + x \cdot e^x \\ &= (x+1) e^x \end{aligned}$$

f' ist offensichtlich stetig, also ist $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

2. f' ist differenzierbar (Produktregel)

und

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^x + (x+1) e^x \\ &= (x+2) e^x \end{aligned}$$

f'' ist offensichtlich stetig, also ist $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

3. Behauptung: $f^{(k)}(x) = (x+k) e^x$

Beweis (Induktion):

Verankerung: $f^{(0)}(x) = f(x) = x e^x = (x+0) e^x$

Schritt: Wir nehmen an, für ein $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$f^{(k)}(x) = (x+k) e^x$$

Aufgrund der Produktregel ist $f^{(k)}$ differenzierbar

und

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= f^{(k)'}(x) \\ &= \frac{d}{dx} \left((x+k) e^x \right) \\ &= 1 \cdot e^x + (x+k) e^x \\ &= (x+k+1) e^x \quad \square \end{aligned}$$

Wir betrachten

$$f(x) := \frac{1}{1-x}, \quad f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$$

Bestimme T_{f, x_0}^3 für $x_0 := 0$

Zur Erinnerung: $T_{f, x_0}^m(x) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$

Lösung:

Wir berechnen zuerst die Ableitungen von f :

$$f^{(1)}(x) = \frac{-1}{(1-x)^2} \cdot (-1) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{-2}{(1-x)^3} \cdot (-1) = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{-6}{(1-x)^4} \cdot (-1) = \frac{6}{(1-x)^4}$$

$$\Rightarrow f^{(1)}(0) = 1, \quad f^{(2)}(0) = 2, \quad f^{(3)}(0) = 6$$

Nun können wir das Taylorpolynom berechnen

$$T_{f, x_0}^3(x) = f(0) + f^{(1)}(0)x + \frac{1}{2!} f^{(2)}(0)x^2 + \frac{1}{3!} f^{(3)}(0)x^3$$

$$= 1 + x + \frac{2}{2} x^2 + \frac{6}{6} x^3$$

$$= 1 + x + x^2 + x^3$$

Beweise, dass auf $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$$(T_{f, x_0}^m)_{m \in \mathbb{N}_0} \xrightarrow{\text{glm.}} f$$

Also, dass die Taylorreihe gleichmässig gegen f konvergiert.

Tipp: $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$

Lösung:

f ist durch die Potenzreihe definiert.

Wir wenden den Satz „gleichmässige Konvergenz der Taylorreihe gegen Limes einer Potenzreihe“ aus dem Script an.

Der Konvergenzradius der Reihe ist $\rho := 1$

$$x_0 = 0 \in (-\rho, \rho), \quad r := \frac{1}{2} \in [0, \rho - |x_0|) = [0, 1)$$

Also sind die Bedingungen für den Satz erfüllt und es folgt, dass die Taylorreihe von f um x_0 auf dem Intervall $[x_0 - r, x_0 + r] = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ gleichmässig gegen f konvergiert.