

Analysis I - Serie 10

10.1

a) Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$= \frac{e^{i(-ix)} + e^{i(ix)}}{2}$$

$$= \frac{\cos(-ix) + i\sin(-ix) + \cos(ix) + i\sin(ix)}{2}$$

$$= \frac{1}{2} (\cos(ix) - \cancel{i\sin(ix)} + \cos(ix) + \cancel{i\sin(ix)})$$

$$= \cos(ix) \quad \square$$

b) Dieser Beweis ist vollkommen analog zu (a)

c) Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig

$$i\sinh(x) = \sin(ix)$$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x)$$

$$\Rightarrow \sinh(x) = -i\sin(ix)$$

$$= \cos^2(ix) - (-i\sin(ix))^2$$

$$= \cos^2(ix) + \sin^2(ix)$$

$$= 1 \quad \square$$

d) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig

$$\cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$$

$$= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4} (e^{x+y} + \cancel{e^{x-y}} + \cancel{e^{-x+y}} + e^{-x-y} + e^{x+y} - \cancel{e^{x-y}} - \cancel{e^{-x+y}} + e^{-x-y})$$

$$= \frac{1}{2} (e^{x+y} + e^{-x-y}) = \cosh(x+y) \quad \square$$

10.2

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig

$$p_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, p_n(x) = x^n$$

Wir wollen zeigen, dass p_n für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ k -mal differenzierbar ist und die k -te Ableitung bestimmen.

Behauptung:

$$p_n^{(k)} = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}, & n \geq k \\ 0, & n < k \end{cases}$$

Induktionsbeweis:

Verankerung: $p_n^{(0)} = x^n = \frac{n!}{(n-0)!} x^{n-0}$

Der Fall $n < k=0$ trifft gar nicht ein, da

$$n \in \mathbb{N}_0, \text{ also } n \geq 0 = k$$

Ansonsten wissen wir ja bereits, dass p_n differenzierbar ist.

Induktionsschritt: Wir nehmen an, für ein fixes $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$p_n^{(k)}(x) = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}, & n \geq k \\ 0, & n < k \end{cases}$$

und $p_n^{(k)}$ ist differenzierbar.

Wir betrachten nun $p_n^{(k+1)}$, also die Ableitung von $p_n^{(k)}$.

Falls $n \geq k+1$ ist $p_n^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow p_n^{(k+1)}(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \right) = \frac{n!}{(n-k)!} (n-k) x^{n-k-1} \\ &= \frac{n!}{(n-(k+1))!} x^{n-(k+1)} \end{aligned}$$

Falls $n = k$ ist $p_n^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$
 $= \frac{n!}{0!} x^0 = n!$

also konstant.

$\Rightarrow p_n^{(k+1)}(x) = 0$

Falls $n < k$ ist $p_n^{(k)}(x) = 0$, also $p_n^{(k+1)}(x) = 0$

Es folgt also, dass

$$p_n^{(k+1)}(x) = \begin{cases} \frac{n!}{(n-(k+1))!} x^{n-(k+1)}, & n \geq k+1 \\ 0, & n < k+1 \end{cases}$$

Diese Funktion ist offensichtlich differenzierbar, da sie ein Polynom ist. $\square$

10.3

a) Wir haben in 10.2 gesehen, dass alle Potenzfunktionen glatt sind.

Ein Polynom ist eine Linearkombination von Potenzfunktionen. Jede Linearkombination glatter Funktionen ist auch glatt (einfach aus Ableitungsregeln zu beweisen).

b) p und q sind differenzierbar, da sie Polynome sind.

Also muss auch deren Quotient $\frac{p}{q} =: f$ differenzierbar sein. (Quotientenregel)

Außerdem hat f die Ableitung

$$f' = \frac{p'q - pq'}{q^2}$$

Da Produkte, Summen und Ableitungen von Polynomen auch wieder Polynome sind, folgt

- $p'q - pq'$ ist ein Polynom

- q^2 ist ein Polynom

Wir schließen: Jede rationale Funktion ist differenzierbar und ihre Ableitung ist rational.

Mittels Induktion können wir schliesslich folgern, dass jede rationale Funktion differenzierbar ist:

Sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige rationale Funktion wie in der Aufgabenstellung.

Verankerung: $f^{(0)}$ ist rational, also auch differenzierbar

Schritt: Wir nehmen an, für fixes $k \in \mathbb{N}_0$ ist $f^{(k)}$ rational und differenzierbar.

Aus obiger Argumentation folgt:

$f^{(k+1)}$ ist rational und differenzierbar.

10.3 c)

Verankerung: $\exp^{(0)} = \exp$ ist differenzierbar

Induktionsschritt: Wir nehmen an, das für ein bestimmtes $k \in \mathbb{N}_0$ $\exp^{(k)} = \exp$.

$$\Rightarrow \exp^{(k+1)} = (\exp^{(k)})' = \exp' = \exp$$

und $\exp^{(k+1)}$ ist also differenzierbar. $\square$

Die Aussage folgt ausserdem direkt daraus, dass jede Funktion, die durch eine Potenzreihe definiert ist, glatt ist.

d) Dieser Beweis ist sehr ähnlich wie jener in (c).

10.4

Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig

$$\begin{aligned} \cos|_{\mathbb{R}}'(x) &= \frac{d}{dx} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j x^{2j}}{(2j)!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{(-1)^j x^{2j}}{(2j)!} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j 2j x^{2j-1}}{(2j)!} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j x^{2j-1}}{(2j-1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= -\sin|_{\mathbb{R}}(x) \quad \square \end{aligned}$$

$(\sin|_{\mathbb{R}})' = \cos|_{\mathbb{R}}$ folgt ganz analog

10.5

a) 1) $T_{f,x_0}^0(x) = f(0) = 1$

$$T_{f,x_0}^1(x) = f(0) + f'(0)(x-x_0) = 1 + x$$

$$T_{f,x_0}^2(x) = f(0) + f'(0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(0)(x-x_0)^2 = 1 + x + x^2$$

$$T_{f,x_0}^3(x) = 1 + x + x^2 + x^3$$

$$T_{f,x_0}^4(x) = 1 + x + x^2 + x^3$$

2) $R_{f,x_0}^1(x) = f(x) - T_{f,x_0}^1(x)$
 $= 1 + x + x^2 + x^3 - (1 + x)$
 $= x^2 + x^3$

3) $T_{f,x_0} = (T_{f,x_0}^m)_{m \in \mathbb{N}_0}$

$$= \left(\sum_{k=0}^m c_k x^k \right)_{m \in \mathbb{N}_0}$$

$$c_k = \begin{cases} 1, & k \leq 3 \\ 0, & k > 3 \end{cases}$$

b) 1) $T_{f,x_0}^m(x) = \sum_{k=0}^{\min(n,m)} a_k x^k$

2) $R_{f,x_0}^m(x) = \sum_{k=\min(n,m)+1}^n a_k x^k$

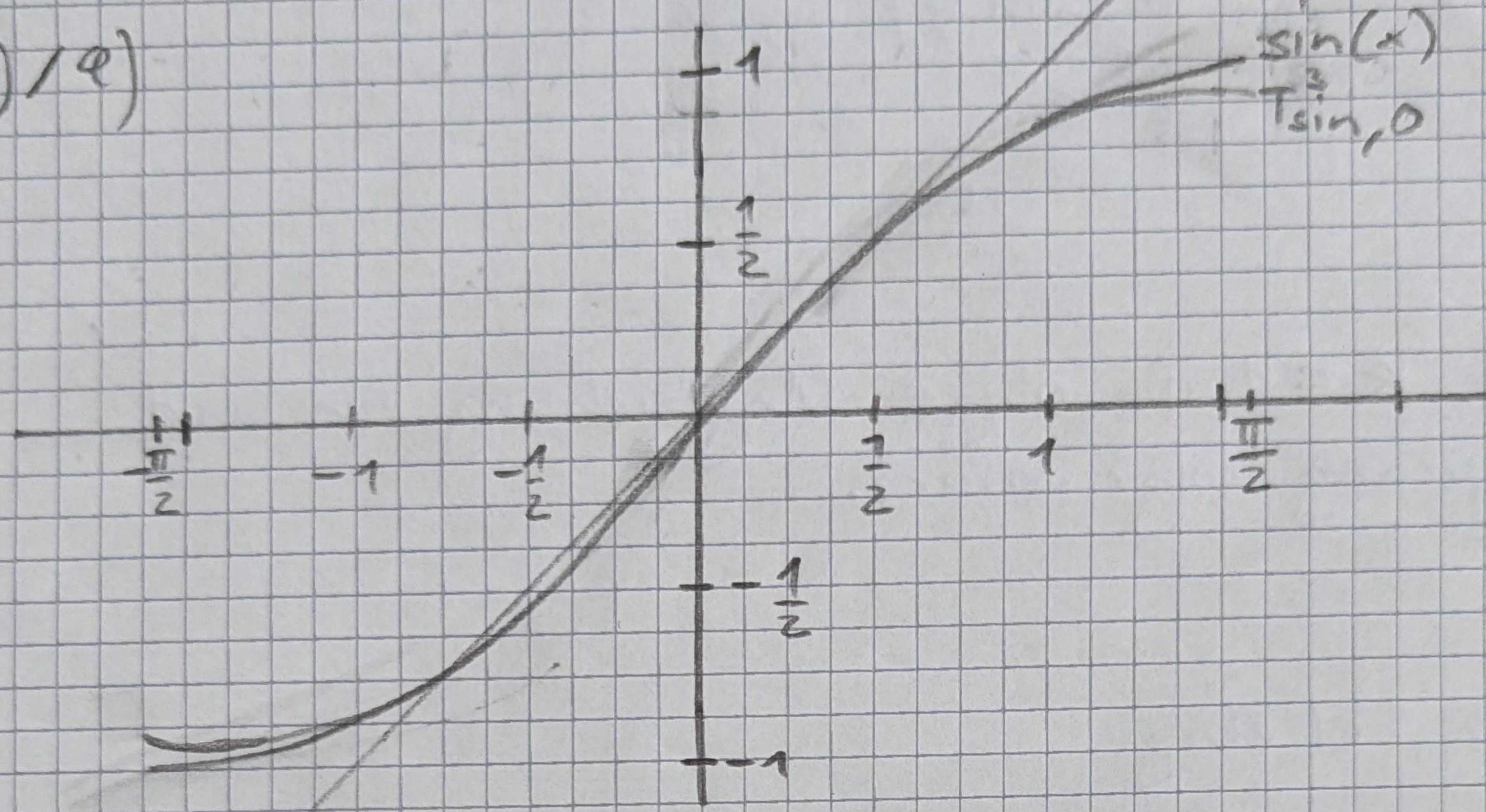
3) $T_{f,x_0} = (T_{f,x_0}^m)_{m \in \mathbb{N}_0}$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\min(n,m)} a_k x^k \right)_{m \in \mathbb{N}_0}$$

c) 1) $T_{\sin, x_0}^m(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$

2) $T_{\sin, x_0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$

3) / 4)



6) $\sin$ ist durch eine Potenzreihe definiert.
Also konvergiert die Taylorreihe von $\sin$
auf jedem Intervall gleichmässig gegen f .

7) $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + R_{\sin, x_0}^3(x)$

$x \in]0, \infty[$, also $x > 0 = x_0$

$\sin$ ist zudem eine glatte Funktion. Gemäss
Satz 5.43 folgt: Es gibt $\xi \in]0, \infty[$

$$R_{\sin, x_0}^3(x) = \frac{\sin^{(4)}(\xi)}{4!} x^4$$

$$= \frac{\sin(\xi)}{24} x^4$$

$$\Rightarrow \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + R_{\sin, x_0}^3(x)$$

$$\begin{aligned}
 8) \quad \left| \sin(x) - x + \frac{x^3}{6} \right| &= \left| R_{\sin, x_0}^3(x) \right| \\
 &= \left| \frac{\sin \xi}{24} x^4 \right| \\
 &= \left| \sin \xi \right| \frac{x^4}{24} \\
 &\leq \frac{x^4}{24} \quad \square
 \end{aligned}$$

9) Wir setzen $x=1$ in obige Ungleichung ein und die Behauptung folgt sofort.

10) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig
 Wir wählen $\delta := 24\varepsilon$
 Sei $x \in [-\delta, \delta]$ beliebig

$$\begin{aligned}
 \left| \sin x - x + \frac{x^3}{6} \right| &\leq \frac{x^4}{24} = \frac{|x|^4}{24} = \frac{|x|}{24} \cdot |x|^3 \\
 &\leq \frac{\delta}{24} \cdot |x|^3 \\
 &= \varepsilon \cdot |x|^3 \quad \square
 \end{aligned}$$

$$11) f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{\sin(x) - x + \frac{x^3}{6}}{x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x + \frac{x^3}{6}}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}}{3x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x) + x}{6x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos(x) + 1}{6} = 0 \quad \square$$

Bernoulli de l'Hôpital

10.5

$$\begin{aligned} \text{d) } T_{\sin, x_0 = \frac{\pi}{2}}^2(x) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } f(x) &= e^{x^2} \\ f'(x) &= 2xe^{x^2} \\ f''(x) &= 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{f, x_0}^2(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 \\ &= e^0 + 2 \cdot 0 \cdot e^0 \cdot x + \frac{1}{2}(2e^0 + 0)x^2 \\ &= 1 + x^2 \end{aligned}$$