

Bestimme die Ableitung von

$$g(x) := \arcsin(x), \quad g:]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$$

Tipp: Umkehrsatz und $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

Repetition Umkehrsatz:

Für $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall x \in X \quad f'(x) > 0$ gilt

(i) $\text{im}(f) =]\inf f, \sup f[$

(ii) $f^{-1}: \text{im}(f) \rightarrow X$ ist differenzierbar mit

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Lösung:

$$f(x) = \sin(x), \quad f:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$g = f^{-1} \quad \text{und} \quad f'(x) = \cos(x) > 0 \quad \text{für} \quad x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

also können wir den Umkehrsatz anwenden:

(i) $\text{im}(f) =]\inf f, \sup f[=]-1, 1[$

(ii) $g:]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar mit

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \square \end{aligned}$$

Berechne den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1-x)}{x}$$

Lösung:

Wir wenden die Regel von Bernoulli de l'Hospital an:

Zuerst die Bedingungen:

a) $\log(1-0) = 0 = 0$

b) & c) beide Funktionen sind stetig und differenzierbar auf ganz $]0, \infty[$

d) $\frac{d}{dx}(x) = 1 \neq 0$ auf ganz $\mathbb{R}$

e)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1-x} \cdot (-1)}{1} = -1$$

□

Wir betrachten die gewöhnliche Differenzialgleichung

$$f'(x) = -x f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

mit dem Anfangswertproblem $f(0) = y_0 \in \mathbb{R}$

Finde eine Lösung und beweise, dass diese die einzige mögliche Lösung ist.

Tipp: $f(x) = c e^{-\frac{1}{2}x^2}$ für ein $c \in \mathbb{R}$
und betrachte $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, $g(x) = e^{\frac{1}{2}x^2}$

Lösung:

Wir verwenden wie in der Vorlesung den Mittelwertsatz:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{d}{dx} (f(x) g(x)) = f'(x) g(x) + f(x) g'(x) \\ &= -x f(x) e^{\frac{1}{2}x^2} + f(x) x e^{\frac{1}{2}x^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad h'(x) = 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) = d = \text{const.}$$

$$\text{Also ist } f(x) g(x) = d \Rightarrow f(x) = \frac{d}{g(x)} = d e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Deshalb sind alle Lösungen der Differenzialgleichung von der obigen Form. Wir müssen nun nur noch d bestimmen:

$$f(0) = d \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot 0^2} = d = y_0$$

Also

$$f(x) = y_0 e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad \square$$