

Analysis 1 - Serie 9

9.1

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f = \exp$

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(x_0) \exp(h) - \exp(x_0)}{h}$$

$$= \exp(x_0) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(h) - 1}{h}$$

$$= \exp(x_0) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} - 1 \right)$$

$$= \exp(x_0) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k}{k!} \right)$$

$$= \exp(x_0) \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^{k-1}}{k!}$$

$$= \exp(x_0) \lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + h \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^{k-2}}{k!} \right)$$

$$= \exp(x_0) \lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + h \underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} \frac{h^l}{(l+2)!}}_{=: a} \right)$$

$$|a| = \left| \sum_{l=0}^{\infty} \frac{h^l}{(l+2)!} \right| \leq \sum_{l=0}^{\infty} \frac{|h|^l}{(l+2)!}$$

$$\leq \sum_{l=0}^{\infty} |h|^l = \frac{1}{1-|h|}$$

$$\Rightarrow \left| \lim_{h \rightarrow 0} (1+ha) \right| = \lim_{h \rightarrow 0} |1+ha|$$

$$\leq 1 + \lim_{h \rightarrow 0} |h||a|$$

$$\leq 1 + \left(\lim_{h \rightarrow 0} |h| \right) \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{1-|h|} \right)$$

$$= 1 + 0 \cdot 1 = 1$$

$$\text{Also } \left| \lim_{h \rightarrow 0} (1+ha) \right| \leq 1$$

Man muss nun aber noch zeigen, dass

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1+ha) \geq 1$$

Dann folgt $\lim_{h \rightarrow 0} (1+ha) = 1$, also auch

$$f'(x_0) = \exp(x_0) \lim_{h \rightarrow 0} (1+ha)$$

$$= \exp(x_0)$$

Ich finde folgende Lösung eleganter:

3.1a)
$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(x_0) \exp(h) - \exp(x_0)}{h}$$

$$= \exp(x_0) \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(h) - 1}{h}}_{=1}$$

Beweis, dass $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = 1$:

Also wollen wir zeigen

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall h \in \mathbb{R}$$

$$|h - 0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\exp(h) - 1}{h} - 1 \right| < \varepsilon$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig

$$\text{Wir w\u00e4hlen } \delta := \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon} + 1} = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}$$

Sei $h \in \mathbb{R}$ beliebig mit $|h| < \delta$

$$\left| \frac{\exp(h) - 1}{h} - 1 \right| = \left| \frac{\exp(h) - h - 1}{h} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{h} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} - h - 1 \right) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{h} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^k}{k!} \right) \right| = \left| h \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^{k-2}}{k!} \right|$$

$$\leq |h| \left| \sum_{l=0}^{\infty} \frac{h^l}{(l+2)!} \right| \leq |h| \sum_{l=0}^{\infty} \frac{|h|^l}{(l+2)!}$$

$$\leq |h| \sum_{l=0}^{\infty} |h|^l \leq \delta \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k$$

$$= \delta \frac{1}{1 - \delta} = \frac{1}{\frac{1}{\delta} - 1} = \varepsilon$$

□

3.1 b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := x e^x$

$$f'(x) = e^x + x e^x = (x+1) e^x \quad \square$$

c) $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := x \log x$

$$f'(x) = \log x + 1$$

d) $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := \frac{x+1}{x-1}$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x-1) - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}$$

e) $p_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, p_n(x) := x^n, n \in \mathbb{N}$

Variante 1:

Behauptung: $p_n'(x) = n x^{n-1}$

Induktionsbeweis:

$n=1$: $p_1(x) = x, p_1'(x) = 1 = 1 \cdot x^{1-1} \quad \checkmark$

Induktionsschritt:

Annahme: $p_n'(x) = n x^{n-1}$

$$\Rightarrow p_{n+1}'(x) = \frac{d}{dx} (x \cdot x^n) = \frac{d}{dx} (x \cdot p_n(x))$$

$$= p_n(x) + x \cdot p_n'(x) = x^n + x(n x^{n-1})$$

$$= (n+1) x^n \quad \square$$

Variante 2: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig

$$p'_n(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_n(x+h) - p(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^k \right) - x^n \right)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^k \right)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\binom{n}{1} x^{n-1} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1} \right)$$

$$= n x^{n-1} \quad \square$$

9.1f) $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, p(x) := \sum_{k=0}^n a_k x^k$

Behauptung: $p'(x) = \sum_{k=1}^n a_k k x^{k-1}$

Beweis durch Induktion:

Verankerung: $\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^0 a_k x^k = \frac{d}{dx} (a_0) = 0 = \sum_{k=1}^0 a_k k x^{k-1}$

Schritt: Angenommen für jedes Polynom von Grad n ist die Ableitung wie oben.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k \right) &= \frac{d}{dx} (a_{n+1} x^{n+1}) + \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right) \\ &= a_{n+1} (n+1) x^n + \sum_{k=1}^n a_k k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k k x^{k-1} \quad \square \end{aligned}$$

3.1 g) $p_{-n}: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, p_{-n}(x) := x^{-n}$

$$p_{-n}(x) = \frac{1}{p_n(x)}$$

$$\Rightarrow p_{-n}'(x) = \frac{0 \cdot p_n(x) - 1 \cdot p_n'(x)}{p_n(x)^2}$$

$$= -\frac{n x^{n-1}}{(x^n)^2} = -\frac{n}{x^{n+1}} \quad \square$$

h) $\tan'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}$

$$= 1 + \tan^2(x) \quad \square$$

i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$\Rightarrow f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot -x = -x e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \square$$

j) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := e^{e^x}$

$$\Rightarrow f'(x) = e^{e^x} \cdot e^{e^x} \cdot e^x = e^{(e^x + x) + x}$$

k) $f_b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_b(x) := b^x := e^{x \log b}$

$$f_b'(x) = e^{x \log b} \cdot \log b = \log(b) \cdot b^x$$

9.11) $f_n:]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[$, $f_n(x) := \sqrt[n]{x}$

$$f_n = p_n^{-1}$$

Umkehrsatz: $(p_n' > 0)$

$$f_n'(x) = (p_n^{-1})'(x) = \frac{1}{p_n'(p_n^{-1}(x))}$$

$$= \frac{1}{n f(x)^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

m) $\exp' = \exp > 0$

$$\exp_b(x) := b^x := e^{\log b \cdot x} > 0$$

$$\Rightarrow \exp_b' = \log b \cdot \exp_b > 0$$

Also können wir den Umkehrsatz anwenden:

$$\begin{aligned} \log_b'(x) &= \frac{1}{\exp_b'(\log_b(x))} = \frac{1}{\log b \exp_b(\log_b(x))} \\ &= \frac{1}{\log(b) x} \end{aligned}$$

9.1 n) $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) > 0$

$$\Rightarrow \arctan'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))}$$
$$= \frac{1}{1 + x^2}$$

9.2

a) $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := e^{x^2}$

$$f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2}$$

$$f'(x_0) = e - 1 \Rightarrow 2x_0 e^{x_0^2} = e - 1$$

Die Gleichung ist schwierig nach x_0 aufzulösen.

Zum Glück können wir den Mittelwertsatz verwenden:

$$\forall a, b \in [0, 1] \quad \exists x_0 \in]0, 1[$$

$$f(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Wenn wir $a=0$, $b=1$ wählen erhalten wir

$$\exists x_0 \quad f(x_0) = \frac{e - 1}{1 - 0} = e - 1$$

□

3.2 b)

Wir betrachten $f(x) := -p_{-n}(x)$, $f:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$

Denn f monoton wachsend $\Leftrightarrow -p_{-n}$ monoton fallend

$$f'(x) = -p_{-n}'(x) = \frac{n}{x^{n+1}} > 0$$

Also ist p_{-n} streng monoton fallend

c) Sei $f:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, sodass

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x}$$

$f(x) = cx$ löst diese Gleichung:

$$f'(x) = c = \frac{cx}{x} = \frac{f(x)}{x}$$

$$f(1) = c \cdot 1 = c$$

Also haben wir eine mögliche Lösung $f(x) = f(1)x$

Jetzt bleibt noch zu zeigen, dass dies die einzige Lösung ist.

Wir betrachten $g:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$

$$\frac{d}{dx}(g(x) \cdot f(x)) = g'(x) f(x) + g(x) f'(x)$$

$$= -\frac{1}{x^2} f(x) + \frac{1}{x} f'(x)$$

$$= -\frac{1}{x^2} f(x) + \frac{1}{x^2} f(x) = 0$$

Es folgt also

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = c$$

$$\Rightarrow f(x) = cx$$

$$\Rightarrow f(x) = f(1)x \quad \square$$

9.3

a) Die Bedingungen für die Regel von Bernoulli de l'Hôpital sind erfüllt

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} \\ &= \underline{\underline{1}} \end{aligned}$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = h(0) = 1$ (da h stetig ist)

Ist das ein Fehler in der Aufgabenstellung?

c) $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x)} = 1$
Bernoulli de l'Hôpital

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos(x)} = 2$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x - x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{e^x} = 2$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1+x} = 1$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{1} = 0$$

9.4

$$\begin{aligned} \text{a) } \sinh'(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &= \cosh(x) \end{aligned}$$

$$\cosh'(x) = \sinh(x)$$

$$\begin{aligned} \tanh'(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \right) = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} \\ &= 1 - \tanh^2(x) \end{aligned}$$

$$\text{b) } I_{\sinh} = \{ x \in \mathbb{R} \mid \sinh'(x) = \cosh(x) > 0 \}$$

$$\cosh(x) > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow I_{\sinh} = \mathbb{R}$$

$$I_{\cosh} = \{ x \in \mathbb{R} \mid \cosh'(x) = \sinh(x) > 0 \}$$

$$\sinh(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} > 0$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} > 1$$

$$\Leftrightarrow 2x > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 0$$

$$\Rightarrow I_{\cosh} =]0, \infty[$$

$$I_{\tanh} = \{ x \in \mathbb{R} \mid \tanh'(x) > 0 \}$$

$$\tanh'(x) = 1 - \frac{\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)}$$

$$= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{4\cosh^2(x)}$$

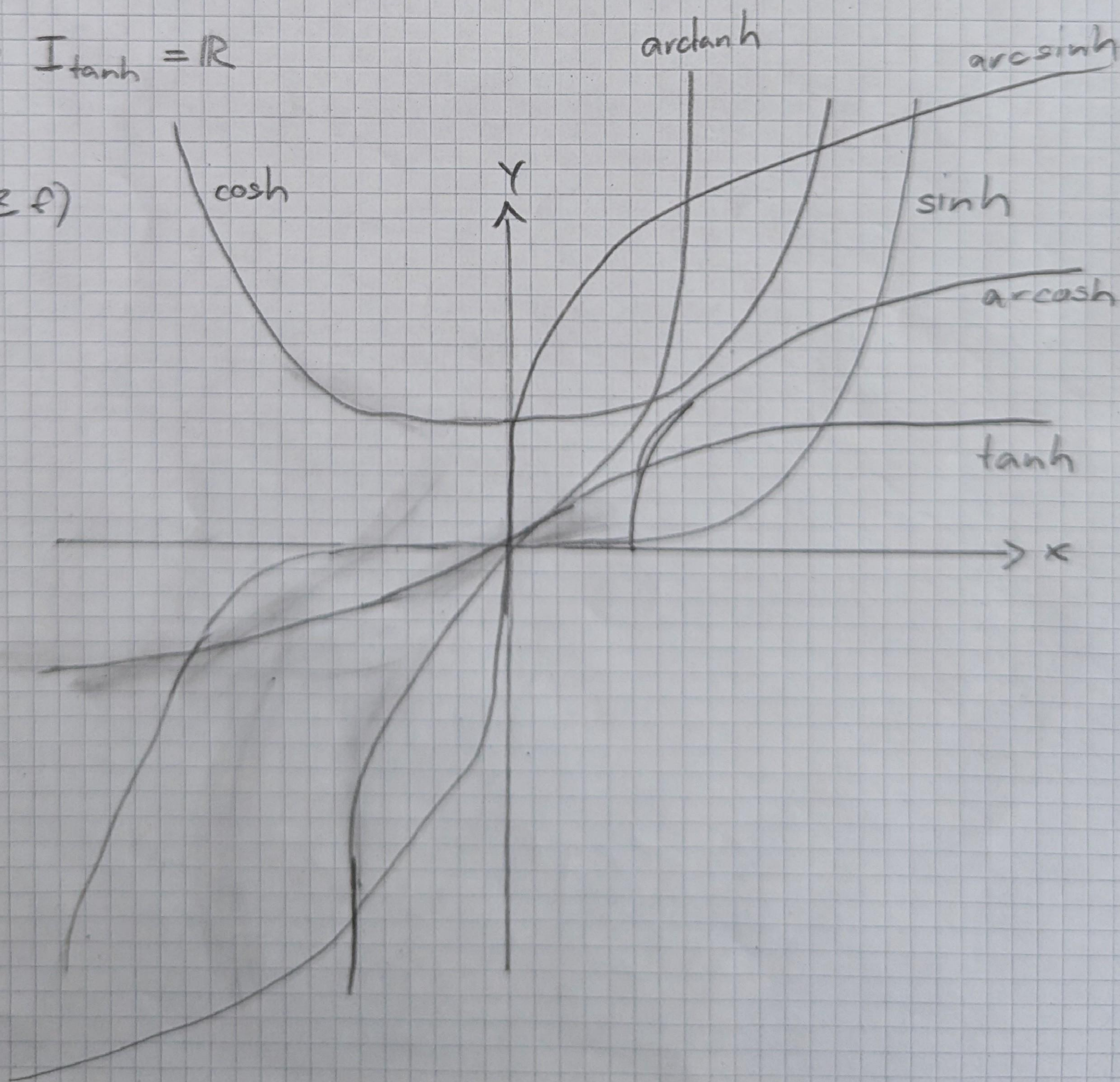
$$= \frac{\cancel{e^{2x}} + 2 + \cancel{e^{-2x}} - \cancel{e^{2x}} + 2 - \cancel{e^{-2x}}}{4\cosh^2(x)}$$

$$= \frac{1}{\cosh^2(x)}$$

Also ist $\forall x \in \mathbb{R} \quad \tanh'(x) > 0$

$$\Rightarrow I_{\tanh} = \mathbb{R}$$

c) & f)



d) Die Funktionen sind streng monoton wachsend auf den Intervallen I_f .

$\Rightarrow$ Nach Satz aus dem Skript sind die Funktionen

$$\cosh: \mathbb{R} \rightarrow]1, \infty[$$

$$\sinh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\tanh: \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$$

bijektiv

$\Rightarrow$ Es existieren

$$\operatorname{arcosh}:]1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arsinh}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\operatorname{artanh}:]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$e) \quad \operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{\sinh'(\operatorname{arsinh}(x))}$$

$$= \frac{1}{\cosh(\operatorname{arsinh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\operatorname{arcosh}'(x) = \frac{1}{\cosh'(\operatorname{arcosh}(x))}$$

$$= \frac{1}{\sinh(\operatorname{arcosh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{-1+x^2}}$$

$$\operatorname{artanh}'(x) = \frac{1}{\tanh'(\operatorname{artanh}(x))}$$

$$= \frac{1}{1-x^2}$$