

Wir betrachten $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$

$$f(x) = \sin(x)$$

- Beweise, dass f injektiv ist.
Verwende, dass $f(x)$ streng monoton wächst.
- Beweise, dass f surjektiv ist.
- Beweise, dass f eine Umkehrfunktion besitzt und dass diese stetig ist.

Lösung:

- a) f ist streng monoton wachsend. Also gilt

$$\forall x, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \quad (1)$$

Wir wollen zeigen, dass

$$\forall x, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

Beweis:

Seien $x, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ mit $x \neq y$

Falls $x > y$, folgt aus (1), dass $f(x) > f(y)$

$$\Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

Falls $x < y$, folgt ganz analog $f(x) \neq f(y)$

Also ist f injektiv. $\square$

- b) Wir wissen aus der Definition von f , dass $\text{Im}(f) \subseteq [-1, 1]$. Wir müssen also nur noch die umgekehrte Inklusion zeigen: $[-1, 1] \subseteq \text{Im}(f)$

Beweis:

Sei $y \in [-1, 1]$ beliebig

$$\Rightarrow y \in \left[\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right]$$

f ist stetig, also können wir den Zwischenwertsatz anwenden:

$$\Rightarrow \text{Es gibt } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], \text{ so dass } f(x) = y$$

Also ist $y \in \text{Im}(f)$

$$\Rightarrow [-1, 1] \subseteq \text{Im}(f) \quad \square$$

- c) f ist eine stetige Funktion, definiert auf einem Intervall. Also gilt gemäss einem Satz aus der Vorlesung, dass deren Umkehrfunktion stetig ist.

Die Umkehrfunktion existiert, da f ja bijektiv ist (wie wir in (a) und (b)) gezeigt haben).

Sei $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$

Beweise, dass f auf $(0, \infty)$ differenzierbar ist und bestimme ihre Ableitung $f': (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Lösung: Sei $x \in (0, \infty)$ beliebig

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{x}{x(x+h)} - \frac{x+h}{x(x+h)} \right)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{-h}{x(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} - \frac{1}{x(x+h)}$$

$$= - \frac{1}{x^2} \quad \square$$

Es sei $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt{|x| + \frac{1}{n^3}}$

Zeige, dass die Funktion punktweise konvergiert.

Zeige dann, dass die Funktion gleichmässig konvergiert.

Lösung:

Die Funktion konvergiert punktweise, denn für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{|x| + \frac{1}{n^3}} \\ &= \sqrt{|x|} =: f(x)\end{aligned}$$

Die Funktion konvergiert ausserdem gleichmässig.
Das heisst

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R}$$

$$n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Beweis:

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig

Wir wählen $n_0 \geq \frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$

Seien $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ und $x \in \mathbb{R}$ beliebig

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f(x)| &= \left| \sqrt{|x| + \frac{1}{n^3}} - \sqrt{|x|} \right| \\ &\leq \left| \sqrt{|x| + \frac{1}{n^3}} - \sqrt{|x|} \right| \cdot \left| \sqrt{|x| + \frac{1}{n^3}} + \sqrt{|x|} \right| \\ &= \left| |x| + \frac{1}{n^3} - |x| \right| = \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n_0^3} \leq \varepsilon\end{aligned}$$

□