

## Serie 8

### 8.1

Wir wollen zeigen  $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x > y \Rightarrow e^x > e^y$

Beweis:

Seien  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $x > y$  beliebig

$$\begin{aligned} e^x - e^y &= e^y (e^{x-y} - 1) \\ &= e^y (e^{x-y} - 1) \\ &> e^y (1 - 1) \quad (x - y > 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Wir haben verwendet, dass

$$\forall x > 0 \quad e^x > 1$$

Beweis:

Sei  $x \in (0, \infty)$  beliebig

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = \frac{1}{1!} x^0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \\ &> 1 \quad (\text{da } x > 0) \end{aligned}$$

### 8.2

Wir sollen zeigen:  $\forall x, y \in (0, \infty) \quad \log(xy) = \log x + \log y$

Beweis:

Seien  $x, y \in (0, \infty)$  beliebig

$$\log(xy) = \log(e^{\log x} e^{\log y}) \quad (x = e^{\log x})$$

$$= \log(e^{\log x + \log y}) \quad (\text{Additionstheorem})$$

$$= \log x + \log y \quad (\log e^x = x)$$

□

### 8.3

$$f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := x^5 - x$$

a)  $f$  ist monoton wachsend:

$$\text{Also } \forall x, y \in [1, 2] \quad x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

Beweis:

$$\text{Seien } x, y \in [1, 2] \text{ mit } x > y$$

$$f(x) = x^5 - x = x(x^4 - 1)$$

$$> y(y^4 - 1) = f(y) \quad \square$$

b)  $f$  ist injektiv:

$$\text{Also } \forall x, y \in [1, 2] \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

Beweis: Seien  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $f(x) = f(y)$

$$\text{Wir nehmen an } x > y \Rightarrow f(x) > f(y) \quad (\text{aus (a)})$$

$$\Rightarrow x \leq y$$

$$\text{Und analog } x \geq y, \text{ also } x = y$$

8.3

c)  $\text{Im}(f) = [0, 30]$

1.  $\text{Im}(f) \subseteq [0, 30]$

Sei  $y \in \text{Im}(f)$ , also  $y = f(x)$  für ein  $x \in [1, 2]$

$$\begin{aligned} y &= f(x) && (y \in \text{Im}(f)) \\ &\geq f(1) && (\text{monoton wachsend (a)}) \\ &= 1^5 - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= f(x) && (y \in \text{Im}(f)) \\ &\leq f(2) && (\text{monoton wachsend (a)}) \\ &= 2^5 - 2 = 30 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y \in [0, 30]$$

$$\Rightarrow \text{Im}(f) \subseteq [0, 30] \quad \square$$

2.  $[0, 30] \subseteq \text{Im}(f)$

Sei  $y \in [0, 30]$  beliebig

$$\Rightarrow y \in [f(1), f(2)]$$

$$\Rightarrow \text{Es gibt } x \in [1, 2], \text{ sodass } f(x) = y$$

(Zwischenwertsatz)

$$\Rightarrow y \in \text{Im}(f)$$

$$\Rightarrow [0, 30] \subseteq \text{Im}(f) \quad \square$$

8.3

d) Für bijektive, stetige Funktionen mit kompaktem Definitionsbereich gilt, dass deren Umkehrfunktion stetig ist.

$\Rightarrow f^{-1}$  ist stetig.

8.4

$$f: U \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(x, y) = \exp(x + iy)$$

$$U := (0, \infty) \times (-\pi, \pi)$$

a)  $f$  ist injektiv

$$\forall x, y \in U \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

Beweis:

Seien  $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in U$  mit  $f(x_1, x_2) = f(y_1, y_2)$

$$\Rightarrow \exp(x_1 + ix_2) = \exp(y_1 + iy_2)$$

$$\Rightarrow \exp(x_1) \exp(ix_2) = \exp(y_1) \exp(iy_2)$$

$$\Rightarrow e^{x_1} \operatorname{cis} x_2 = e^{y_1} \operatorname{cis} y_2 \quad (\text{Eulersche Formel})$$

$$\Rightarrow |e^{x_1} \operatorname{cis} x_2| = |e^{y_1} \operatorname{cis} y_2|$$

$$\Rightarrow e^{x_1} |\operatorname{cis} x_2| = e^{y_1} |\operatorname{cis} y_2|$$

$$\Rightarrow e^{x_1} = e^{y_1}$$

denn  $|\operatorname{cis} x| = 1$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} |\operatorname{cis} x| &= |\cos x + i \sin x| \\ &= \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} \\ &= \sqrt{1} = 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow x_1 = y_1$  (Die reelle Exponentialfunktion ist bijektiv)

Also müssen wir noch  $x_2 = y_2$  zeigen:

Wir haben bereits gezeigt, dass

$$e^{x_1} \operatorname{cis} x_2 = e^{y_1} \operatorname{cis} y_2$$

$$\Rightarrow \operatorname{cis} x_2 = \operatorname{cis} y_2 \quad (x_1 = y_1)$$

$$\Rightarrow \operatorname{cis} x_2 - \operatorname{cis} y_2 = 0$$

$$\Rightarrow |\operatorname{cis} x_2 - \operatorname{cis} y_2| = 0$$

$$\Rightarrow |(\cos x_2 - \cos y_2) + i(\sin x_2 - \sin y_2)| = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{(\cos x_2 - \cos y_2)^2 + (\sin x_2 - \sin y_2)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \cos^2 x_2 - 2 \cos x_2 \cos y_2 + \cos^2 y_2 + \sin^2 x_2 - 2 \sin x_2 \sin y_2 + \sin^2 y_2 = 0$$

$$\Rightarrow (\cos^2 x_2 + \sin^2 x_2) + (\cos^2 y_2 + \sin^2 y_2) - 2(\cos x_2 \cos y_2 + \sin x_2 \sin y_2) = 0$$

$$\Rightarrow 1 + 1 - 2 \cos(x_2 - y_2) = 0$$

$$\Rightarrow \cos(x_2 - y_2) = 1$$

$$\Rightarrow x_2 - y_2 = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Da } x_2, y_2 \in (-\pi, \pi), \text{ muss } x_2 - y_2 \in (-2\pi, 2\pi)$$

$$\Rightarrow x_2 - y_2 = 0$$

$$\Rightarrow x_2 = y_2$$

$$\text{Also ist } (x_1, x_2) = (y_1, y_2) \quad \square$$

8.4

b)  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist stetig und injektiv,  
 $U$  ist offen und  $U \neq \emptyset$

Gemäss Satz 4.53 im Skript folgt also, dass  
im (f) ist offen

c) Aus demselben Satz folgt, dass  $f^{-1}$  stetig ist.

8.5

$$f_m: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_m(x) := x^m$$

Behauptung:

$f_m$  konvergiert punktweise gegen

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 1 \\ 1, & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$

Beweis:

Wir wollen zeigen, dass

$$\forall x \in [0, 1] \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists m_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$m \geq m_0 \Rightarrow |f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Falls  $x = 1$ , so ist

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f(x)| &= |1^m - 1| \\ &= 0 \leq \varepsilon \end{aligned}$$

für beliebiges  $m \in \mathbb{N}$ .

Wir müssen also nur noch den Fall  $x < 1$  betrachten:

Sei  $x \in [0, 1)$  und  $\varepsilon \in (0, \infty)$  beliebig

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f(x)| &= |x^m - 0| \\ &= x^m \end{aligned}$$

Wir bemerken, dass das die geometrische Folge ist, die für  $|x| < 1$  gegen 0 konvergiert.

Also  $\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \Rightarrow x^n \leq \varepsilon$

Wir wählen also  $m_0 := n_0$   $\square$

8.6

a)  $f_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_m(x) = \frac{\cos(x)}{m}$

Behauptung:  $f_m \rightarrow f \equiv 0$  gleichmässig

Wir sollen also zeigen, dass

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m_0 \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R}$$

$$m \geq m_0 \Rightarrow |f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Beweis:

Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig

Wir wählen  $m_0 := \frac{1}{\varepsilon}$

Seien  $m \in \mathbb{N}$  mit  $m \geq m_0$  und  $x \in \mathbb{R}$  beliebig

$$|f_m(x) - f(x)| = \left| \frac{\cos x}{m} - 0 \right|$$

$$= \frac{|\cos x|}{m}$$

$$\leq \frac{1}{m} \leq \frac{1}{m_0}$$

$$= \varepsilon \quad \square$$

8.6

b) Die Folge  $\left( \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k-1}}{k} z^k \right)_{m \in \mathbb{N}}$  ist eine Potenzreihe.

Potenzreihen konvergieren innerhalb ihres Konvergenzradius, also müssen wir diesen bestimmen:

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}}$$

Wir berechnen also

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left| \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right|} \\ &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}} \\ &= \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k}} = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\rho = 1}}$$

Das heisst also, die Folge konvergiert für  $z \in B_1^2(0)$ .  $\square$

c) Potenzreihen sind immer stetig (siehe Satz aus der Vorlesung).  $\square$

8.6

d)  $f_m: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_m(s) := \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^s}$

Sei  $s_0 \in (1, \infty)$

Wir betrachten  $g_m := f_m|_{[s_0, \infty)}$

und wollen zeigen, dass  $g_m \rightarrow \zeta$  gleichmässig

Also, dass gilt  $\exists \zeta: [s_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m_0 \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} \forall s \in \mathbb{R}$$

$$m \geq m_0 \Rightarrow |g_m(s) - \zeta(s)| \leq \varepsilon$$

Beweis:

Wir wissen aus dem Tipp, dass  $\left( \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^{s_0}} \right)_{m \in \mathbb{N}_0}$  nach oben beschränkt ist.

Die Folge ist ausserdem monoton wachsend

$\Rightarrow$  Sie konvergiert

Also existiert  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{s_0}}$

Für  $s \in [s_0, \infty)$  beliebig folgt

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{k^s} \leq \frac{1}{k^{s_0}} \Rightarrow \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^s} \leq \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^{s_0}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{s_0}}$$

Also ist auch  $\left( \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^s} \right)$  beschränkt und monoton wachsend

$$\Rightarrow \left( \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^s} \right)_{m \in \mathbb{N}} \xrightarrow{\text{punktweise}} \zeta(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$$

Nun können wir den Beweis zusammensetzen:

Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig

Da  $\left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{k^{s_0}}\right)_{m \in \mathbb{N}}$  konvergiert, finden wir

$$m_0 \in \mathbb{N}, \text{ so dass } \forall m \geq m_0 \quad \left| \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^{s_0}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{s_0}} \right| \leq \varepsilon$$

Sei  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq m_0$  beliebig

Sei  $s \in [s_0, \infty)$  beliebig

$$|g_m(s) - \zeta(s)| = \left| \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^s} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \right|$$

$$\leq \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k^{s_0}} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^{s_0}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{s_0}} \right| \leq \varepsilon$$

□

e)  $g_m$  ist offensichtlich stetig für jedes  $m \in \mathbb{N}_0$

$g_m$  konvergiert gleichmässig gegen  $\zeta|_{[s_0, \infty)}$

$\Rightarrow \zeta$  ist stetig auf  $[s_0, \infty)$  für jedes  $s_0 \in (1, \infty)$

$\Rightarrow \zeta$  ist stetig auf  $(1, \infty)$  □

8.7

a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := ax^2$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h)^2 - ax^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} a \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x^2}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} a(2x+h) = 2ax =: f'(x)$$

b) Seien  $n, p \in \mathbb{N}$ ,  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $F, G: X \rightarrow \mathbb{R}^p$  und  $x_0 \in \overline{X}$ ,  
sodass  $F$  und  $G$  in  $x_0$  konvergieren

Konvergenz bedeutet:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in X \quad \|x - x_0\| \leq \alpha \Rightarrow \|F(x) - F(x_0)\| \leq \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \beta > 0 \quad \forall x \in X \quad \|x - x_0\| \leq \beta \Rightarrow \|G(x) - G(x_0)\| \leq \varepsilon$$

Wir wollen zeigen

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X$$

$$\|x - x_0\| \leq \delta \Rightarrow \|F(x) + G(x) - F(x_0) - G(x_0)\| \leq \varepsilon$$

Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig

$\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta = \frac{\varepsilon}{2}$ , also finden wir  
 $\alpha, \beta$  gemäss Konvergenz  
von  $F$  und  $G$ .

Wir wählen  $\delta := \min(\alpha, \beta)$

Sei  $x \in X$ ,  $\|x - x_0\| \leq \delta$  beliebig

$$\|F(x) + G(x) - F(x_0) - G(x_0)\| \leq \|F(x) - F(x_0)\| + \|G(x) - G(x_0)\|$$

$$\leq \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta$$

(da  $\|x - x_0\| \leq \alpha$  und  $\|x - x_0\| \leq \beta$ )

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \square$$

8.7

- c) Seien  $p \in \mathbb{N}$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}$  offen,  $f, g: U \rightarrow \mathbb{R}^p$  und  $x_0 \in U$ , sodass  $f$  und  $g$  an der Stelle  $x_0$  differenzierbar sind.

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f+g)(x_0+h) - (f+g)(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) + g(x_0+h) - f(x_0) - g(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \\ &= f'(x_0) + g'(x_0) \end{aligned}$$

Also ist  $f+g$  differenzierbar und  $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

- d) Nein, die Funktion ist nirgends stetig  
Differenzierbarkeit  $\Rightarrow$  Stetigkeit

Kontraposition:

$\neg$  Stetigkeit  $\Rightarrow \neg$  Differenzierbarkeit

Also ist  $x_0$  nirgends differenzierbar.