

Allgemeines Vorgehen Stetigkeitsbeweis mit ϵ - δ

Hinweis: Oft kann gezeigt werden, dass eine Funktion stetig ist, ohne dass man das ϵ - δ -Kriterium verwenden muss. Beispielsweise, falls die Funktion eine Komposition stetiger Funktionen ist, oder falls sie eine Potenzreihe ist.

Wir wollen zeigen, dass eine Funktion $f: X \rightarrow Y$,
 $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ stetig ist, also dass

$$\forall x_0 \in X \quad \forall \epsilon \in (0, \infty) \quad \exists \delta \in (0, \infty) \quad \forall x \in X$$

$$\|x - x_0\| \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| \leq \epsilon$$

Vorgehen:

Beispiel: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

1. Quantoren „auswerten“

δ lassen wir noch offen. Wir werden es später definieren

Seien $x_0 \in X$, $\epsilon \in (0, \infty)$ beliebig

Wir wählen $\delta := ?$ ←

Sei $x \in X$ $\|x - x_0\| \leq \delta$ beliebig

2. $\|f(x) - f(x_0)\|$ einsetzen

$$\|f(x) - f(x_0)\| = |x^2 - x_0^2|$$

3. Vereinfachen mit Ungleichungen ($\leq$) und mit $\|x - x_0\| \leq \delta$.

$$\begin{aligned} &= |x - x_0| |x + x_0| \\ &\leq \delta |x - x_0 + 2x_0| \\ &\leq \delta (|x - x_0| + 2|x_0|) \\ &\leq \delta^2 + 2\delta|x_0| \end{aligned}$$

4. δ bestimmen

(Das machst du auf einem separaten Stück Papier) und oben das „?“ ersetzen.

$$\epsilon = \delta^2 + 2\delta|x_0|$$

$$\text{Mitternachtsformel} \Rightarrow \delta = \sqrt{x_0^2 + \epsilon} - |x_0|$$

5. Folgern, dass der Ausdruck $\leq \epsilon$ ist

$$\begin{aligned} &= (\sqrt{x_0^2 + \epsilon} - |x_0|)^2 + 2(\sqrt{x_0^2 + \epsilon} - |x_0|)|x_0| \\ &= x_0^2 + \epsilon - 2|x_0|\sqrt{x_0^2 + \epsilon} + x_0^2 \\ &\quad + 2\sqrt{x_0^2 + \epsilon}|x_0| - 2x_0^2 \\ &= \epsilon \quad \square \end{aligned}$$