

Inneres des abgeschlossenen Balls

Wir betrachten einen beliebigen abgeschlossenen Ball

$$\overline{B_r^n}(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\}$$
$$(n \in \mathbb{N}, r \in (0, \infty), x_0 \in \mathbb{R}^n)$$

Behauptung:

$$\overset{\circ}{\overline{B_r^n}}(x_0) = B_r^n(x_0)$$

Beweis:

$$1. B_r^n(x_0) \subseteq \overset{\circ}{\overline{B_r^n}}(x_0) = \bigcup_{\substack{A \subseteq \overline{B_r^n}(x_0) \\ A \text{ offen}}} A$$

$$B_r^n(x_0) \text{ ist offen und } B_r^n(x_0) \subseteq \overline{B_r^n}(x_0)$$
$$\Rightarrow B_r^n(x_0) \subseteq \overset{\circ}{\overline{B_r^n}}(x_0)$$

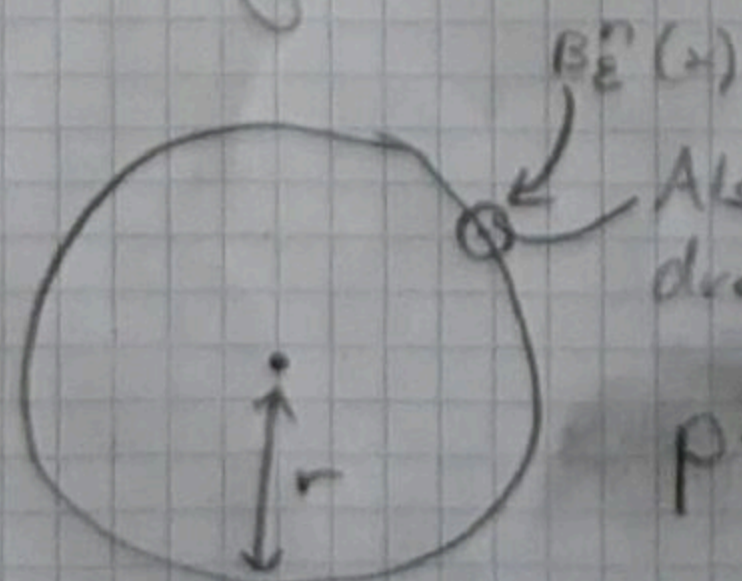
$$2. \overset{\circ}{\overline{B_r^n}}(x_0) \subseteq B_r^n(x_0)$$

Wir nehmen widerspruchswise an, dass es ein x auf dem Rand von $\overline{B_r^n}(x_0)$ gibt, das ein innerer Punkt ist.

Also $x \in S_r^n(x_0)$ und es gibt $\varepsilon > 0$, so dass

$$B_\varepsilon^n(x) \subseteq \overline{B_r^n}(x_0)$$

Wir überlegen uns das graphisch:



Also gibt es hier einen Punkt der draussen ist. Er ist gegeben durch

$$p := x + \frac{\varepsilon}{2} \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}$$

$p \in B_\varepsilon^n(x)$, denn

$$\begin{aligned}\|p - x\| &= \left\| x + \frac{\varepsilon}{2} \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|} - x \right\| \\ &= \left\| \frac{\varepsilon}{2} \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|} \right\| \\ &= \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\end{aligned}$$

$p \notin \overline{B_r^n}(x_0)$, denn

$$\begin{aligned}\|p - x_0\| &= \left\| x + \frac{\varepsilon}{2} \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|} - x_0 \right\| \\ &= \left\| (x - x_0) + (x - x_0) \left(\frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{\|x - x_0\|} \right) \right\| \\ &= \left\| (x - x_0) \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{\|x - x_0\|} \right) \right\| \\ &= \|x - x_0\| \left| 1 + \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{\|x - x_0\|} \right| \\ &= r \left| 1 + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{r} \right| \\ &> r\end{aligned}$$

Widerspruch $\nexists x$ ist kein innerer Punkt

$\Rightarrow$ Also gibt es kein $x \in S_r^n(x_0)$, so dass $x \in \overline{B_r^n}(x_0)$

$\Rightarrow \overline{B_r^n}(x_0) \subseteq B_r^n(x_0)$

□