

Abschluss des offenen Balls (7.4a)

Wir betrachten einen beliebigen offenen Ball

$$B_r^n(x_0) \quad (n \in \mathbb{N}, r \in (0, \infty), x_0 \in \mathbb{R}^n)$$

Behauptung:

$$\overline{B_r^n(x_0)} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\} =: \overline{B}_r^n(x_0)$$

Beweis:

$$1. \overline{B_r^n(x_0)} \supseteq \overline{B_r^n(x_0)} = \bigcap_{\substack{A \supseteq B_r^n(x_0) \\ A \text{ abg.}}} A$$

$\overline{B}_r^n(x_0)$ ist abgeschlossen und $B_r^n(x_0) \subseteq \overline{B}_r^n(x_0)$

Also ist $\overline{B}_r^n$ eine der Mengen A , die in

$\bigcap_{\substack{A \supseteq B_r^n(x_0) \\ A \text{ abg.}}} A$ geschnitten werden.

$$\Rightarrow \overline{B_r^n(x_0)} \supseteq \overline{B}_r^n(x_0)$$

$$2. \overline{B}_r^n(x_0) \subseteq \overline{B_r^n(x_0)}$$

$$\text{Sei } x \in \overline{B}_r^n(x_0) = B_r^n(x_0) \cup S_r^n(x_0)$$

Falls $x \in B_r^n(x_0)$, dann muss $x \in \overline{B_r^n(x_0)}$ offensichtlich.

Falls $x \in S_r^n(x_0)$:

Wir betrachten eine beliebige abgeschlossene Menge $A \supseteq B_r^n(x_0)$.

$\Rightarrow A^c$ ist offen

Falls $x \in A^c$, dann ist x ein innerer Punkt von A^c

$\Rightarrow$ Es gibt $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon^n(x) \subseteq A^c$

Aber da $x \in S_r^n(x_0)$, schneidet $B_\varepsilon^n(x)$ A

$\Rightarrow$ Es gibt $x' \in B_\varepsilon^n(x)$, so dass $x' \in A^c \wedge x' \in A$

$\Rightarrow x \in A$

$\Rightarrow S_r^n(x_0) \subseteq A \subseteq \overline{B_r^n(x_0)} \quad \square$