

Sind die folgenden Mengen

- offen?
- abgeschlossen?
- beschränkt?
- kompakt?

Bestimme das Innere, den Abschluss und den Rand der Mengen.

$$A := \emptyset$$

$$B := \mathbb{R}^n$$

$$C := (-1, 1)$$

$$D := (-\infty, 3]$$

$$E := (-\infty, \infty)$$

$$F := \{0\}$$

$$G := \mathbb{N}$$

$$H := ((0, 2) \cup (3, 5)) \cap (1, 4)$$

$$I := ([0, 2] \cap [3, 5]) \cup [1, 4]$$

$$J := \{\sqrt[n]{n} \mid n \in \mathbb{N} \wedge n > 1\}$$

Lösung:

A ist offen, abgeschlossen, beschränkt, kompakt

$$\overset{\circ}{A} = \emptyset, \bar{A} = \emptyset, \partial A = \emptyset$$

B ist offen, abgeschlossen

$$\overset{\circ}{B} = \mathbb{R}^n, \bar{B} = \mathbb{R}^n, \partial B = \emptyset$$

C ist offen, beschränkt

$$\overset{\circ}{C} = (-1, 1), \bar{C} = [-1, 1], \partial C = \{-1, 1\}$$

D ist abgeschlossen

$$\overset{\circ}{D} = (-\infty, 3), \bar{D} = (-\infty, 3], \partial D = \{3\}$$

E ist offen, abgeschlossen

$$\overset{\circ}{E} = \mathbb{R}, \bar{E} = \mathbb{R}, \partial E = \emptyset$$

F ist abgeschlossen, beschränkt, kompakt

$$\overset{\circ}{F} = \emptyset, \overline{F} = \{0\}, \partial F = \{0\}$$

G ist abgeschlossen

$$\overset{\circ}{G} = \emptyset, \overline{G} = \mathbb{N}, \partial G = \mathbb{N}$$

H ist offen, beschränkt

$$\overset{\circ}{H} = H, \overline{H} = [1, 2] \cap [3, 4], \partial H = \{1, 2, 3, 4\}$$

I ist abgeschlossen, beschränkt, kompakt

$$\overset{\circ}{I} = (1, 2) \cup (3, 4), \overline{I} = I, \partial I = \{1, 2, 3, 4\}$$

J ist beschränkt

$$\overset{\circ}{J} = \emptyset, \overline{J} = \{\sqrt[n]{n} \mid n \in \mathbb{N}\} = \partial J$$

Zeige mit der Definition, dass $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := 3x - 2$ im Punkt $x_0 := 1$ gegen $y_0 := 1$ konvergiert.

Also, dass

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - y_0| \leq \varepsilon$$

Beweis:

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig

Wir wählen $\delta := \frac{\varepsilon}{3}$

Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| \leq \delta$ beliebig

$$|f(x) - y_0| = |3x - 2 - 1| = |3x - 3|$$

$$= 3|x - 1|$$

$$= 3|x - x_0|$$

$$\leq 3\delta$$

$$= \varepsilon \quad \square$$

Bemerkung:

Wir wissen, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist. Wir hätten aus der Stetigkeit von f direkt folgern können, dass $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = 1 = y_0$.

Wir betrachten

$$U := \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x + \cos(x^3) \leq 2\}$$

Zeige die folgenden Dinge:

1. U ist abgeschlossen
2. U ist beschränkt
3. U ist kompakt
4. Die Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ nimmt ein Maximum und ein Minimum an.

Lösung:

1. (U ist abgeschlossen)

Wir bemerken, dass U das Urbild einer stetigen Funktion g ist.

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := x + \cos(x^3)$$

Also können wir U schreiben als

$$\begin{aligned} U &= \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq g(x) \leq 2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \in [-2, 2]\} \\ &= g^{-1}([-2, 2]) \end{aligned}$$

Ein Satz aus der Vorlesung besagt, dass für stetige Funktionen das Urbild einer abgeschlossenen Menge abgeschlossen ist.

g ist stetig und $[-2, 2]$ ist abgeschlossen, also ist $g^{-1}([-2, 2]) = U$ abgeschlossen. $\square$

2. (U ist beschränkt)

Wir wollen zeigen, dass U beschränkt ist, also dass es ein $r \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für ein $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt

$$U \subseteq B_r^1(x_0)$$

Der Einfachheit halber wählen wir $x_0 := 0$ (das funktioniert immer).

Also müssen wir r finden, sodass

$$\forall x \in U \quad |x| < r$$

$$|x| = |x + \cos(x^3) - \cos(x^3)|$$

$$\leq |x + \cos(x^3)| + |\cos(x^3)| \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$

$$\leq 2 + 1 \quad (x \in U \text{ und } |\cos(y)| \leq 1)$$

$$< 4$$

Wir haben also $r := 4$ gefunden. $\square$

3. (U ist kompakt)

Gemäss (1.) und (2.) ist U abgeschlossen und beschränkt, also kompakt.

4. (f nimmt Maximum/Minimum an)

Gemäss Satz aus der Vorlesung nimmt jede reellwertige stetige Funktion definiert auf einer nicht-leeren, kompakten Menge sowohl ein Maximum als auch ein Minimum an.

f ist reellwertig und stetig

U ist nicht leer und kompakt

$\Rightarrow f$ nimmt ein Maximum und ein Minimum auf U an.

$\square$