

7.1

b)

$$U = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N} \mid |x - n| < \frac{1}{n} \right\}$$

$$= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ x \in \mathbb{R} \mid |x - n| < \frac{1}{n} \right\}$$

$$= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{\frac{1}{n}}^1(n)$$

U ist also eine Vereinigung offener Mengen.
Gemäss einem Satz aus der Vorlesung muss
 U also auch offen sein.

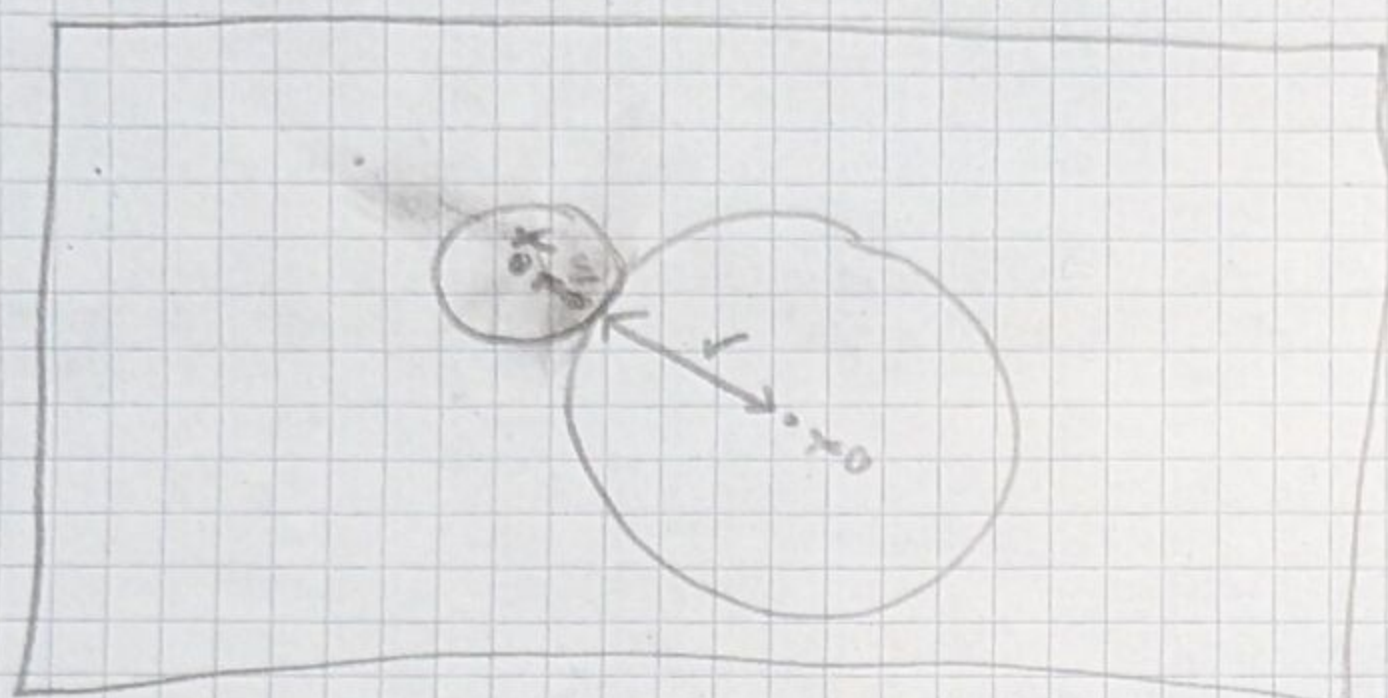
$$U' = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - (1, 0)\| < 2 \wedge \|x - (-1, 0)\| < 2 \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - (1, 0)\| < 2 \right\} \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - (-1, 0)\| < 2 \right\}$$

$$= B_2^2((1, 0)) \cap B_2^2((-1, 0))$$

U' ist also die Schnittmenge zweier offener Mengen.
Gemäss Satz aus der Vorlesung ist jede Schnittmenge
endlich vieler offener Mengen auch offen. Also ist
 U' offen. $\square$

7.2 a)



Wir betrachten einen beliebigen abgeschlossenen Ball

$$\overline{B_r^n(x_0)} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\}$$

und wollen zeigen, dass dieser abgeschlossen ist.

Beweis:

Dafür müssen wir zeigen, dass $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_r^n(x_0)}$ offen ist.

Also, dass alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_r^n(x_0)}$ innere Punkte sind.

Sei $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_r^n(x_0)}$ beliebig

Nun wollen wir zeigen, dass x ein innerer Punkt von $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_r^n(x_0)}$ ist. Also, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass $B_\varepsilon^n(x) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_r^n(x_0)}$.

Wir wählen $\varepsilon > 0$ gemäss Skizze als

$$\varepsilon := \|x - x_0\| - r$$

und betrachten nun $p \in B_\varepsilon^n(x)$ beliebig.

Wir haben die Aussage gezeigt, wenn wir folgern können, dass $p \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_r^n(x_0)}$, also, falls

$$\|p - x_0\| > r$$

Das ist wahr, denn

umgekehrte Dreiecksungleichung

$$\|p - x_0\| = \|(p - x) + (x - x_0)\| \geq \|x - x_0\| - \|p - x\|$$

$$> \|x - x_0\| - \varepsilon = \|x - x_0\| - \|x - x_0\| + r = r \quad \square$$

7.2c)

$$\begin{aligned} A &:= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - (1,0)\| \leq 2 \vee \|x - (-1,0)\| \leq 2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - (1,0)\| \leq 2\} \cup \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - (-1,0)\| \leq 2\} \\ &= \overline{B_2^2((1,0))} \cup \overline{B_2^2((-1,0))} \end{aligned}$$

A ist also die Vereinigung von zwei abgeschlossenen Mengen. Gemäss Satz aus der Vorlesung muss A also auch abgeschlossen sein.

7.2d)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$

Wir wollen zeigen, dass $[a, b]$ abgeschlossen ist.

Dafür verwenden wir das Folgenkriterium:

Eine Menge S ist abgeschlossen, genau wenn

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall (x_k \in S)_{k \in \mathbb{N}} \quad (x_k \rightarrow x) \Rightarrow (x \in S)$$

Beweis:

Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig

Sei $(x_k \in [a, b])_{k \in \mathbb{N}}$ mit $x_k \rightarrow x$ ($k \rightarrow \infty$) beliebig

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N} \quad x_k \leq b, \text{ da } x_k \in [a, b] \\ \Rightarrow x \leq b \end{aligned}$$

In analoger Weise folgt $x \geq a$

Also gilt $x \in [a, b]$, womit also bewiesen ist, dass $[a, b]$ abgeschlossen ist. $\square$

1. Behauptung: $\emptyset$ ist abgeschlossen

Beweis:

$$\emptyset \text{ abgeschlossen} \Leftrightarrow \mathbb{R}^d \setminus \emptyset \text{ offen}$$

Wir müssen also zeigen, dass $\mathbb{R}^d$ offen ist.
Das ist trivial, denn wir können für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^d$ den Ball $B_1^d(x)$ betrachten. x ist offensichtlich im Ball anhalten und der Ball ist offensichtlich eine Teilmenge von $\mathbb{R}^d$. Also ist jeder Punkt in $\mathbb{R}^d$ ein innerer Punkt. $\square$

Behauptung: $\mathbb{R}^d$ ist abgeschlossen

Beweis:

$$\mathbb{R}^d \text{ abgeschlossen} \Leftrightarrow \mathbb{R}^d \setminus \mathbb{R}^d \text{ offen}$$

$\mathbb{R}^d \setminus \mathbb{R}^d = \emptyset$, also müssen wir zeigen, dass die leere Menge offen ist.

Da die leere Menge keine Elemente hat gilt trivialerweise, dass alle Punkte $\in \emptyset$ innere Punkte sind. Also ist $\emptyset$ offen. $\square$

2. Behauptung: Jeder Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

Also: Für jede Menge S von abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ gilt

$$\bigcap_{A \in S} A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall A \in S, x \in A\} \text{ ist abgeschlossen}$$

Beweis:

Sei S eine Menge abgeschlossener Teilmengen von $\mathbb{R}^n$

$$\bigcap_{A \in S} A \text{ abgeschlossen} \Leftrightarrow \left(\bigcap_{A \in S} A \right)^c \text{ offen}$$

$$\left(\bigcap_{A \in S} A \right)^c = \bigcup_{A \in S} A^c \quad (\text{Serie 6, 6.6})$$

Alle $A \in \mathcal{S}$ sind abgeschlossen, also ist A^c für alle $A \in \mathcal{S}$ offen.

$\bigcup_{A \in \mathcal{S}} A^c$ ist also eine Vereinigung offener Mengen. Gemäss Satz aus der Vorlesung ist diese Menge also offen

$\Rightarrow \bigcap_{A \in \mathcal{S}} A$ ist abgeschlossen $\square$

7.4

a) $B_r^n(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < r\}$

$\overline{B_r^n(x_0)} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\}$

b) $\overline{\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}} = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$

c) $\overline{\left\{\left(\frac{1}{n}, (-1)^n\right) \mid n \in \mathbb{N}\right\}} = \left\{\left(\frac{1}{n}, (-1)^n\right) \mid n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{(0, 1), (0, -1)\}$

d) $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

7.5

a) $\partial \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$

b) $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$

7.6

- a) Die Funktion $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$
 konvergiert in x_0 gegen $y_0 := 0$
 Die Funktion ist in x_0 nicht definiert.

Beweis:

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig

$$\begin{aligned} \|f(x) - y_0\| &= \|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\| \\ &= |x| \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \\ &\leq |x| \end{aligned}$$

Wählen wir also $\delta := \varepsilon$, so folgt für
 beliebiges $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $\|x - x_0\| = \|x\| < \delta$

$$\|f(x) - y_0\| \leq |x| \leq \varepsilon \quad \square$$

- b) Die Funktion $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$
 konvergiert in x_0 gegen $y_0 := 0$
 Die Funktion ist in x_0 nicht definiert.

Beweis:

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig

$$\|f(x) - y_0\| = \|e^{-\frac{1}{x}}\| = e^{-\frac{1}{x}}$$

Wir wollen $e^{-\frac{1}{x}} < \varepsilon$

Das ist wahr für $\varepsilon \geq 1$, da $x > 0$

Wir betrachten nun also den Fall $\varepsilon < 1$

$$e^{-\frac{1}{x}} < \varepsilon \Leftrightarrow -\frac{1}{x} < \log \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow -1 < x \log \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\log \varepsilon} > x$$

Wir wählen also $\delta := -\frac{1}{\log \varepsilon}$

Dann folgt für beliebiges $x \in (0, \infty)$ mit $\|x - x_0\| = x < \delta$

$$x < -\frac{1}{\log \varepsilon} \Rightarrow e^{-\frac{1}{x}} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |f(x) - \gamma_0| < \varepsilon \quad \square$$

c) Aus einem ähnlichen Argument wie in (b) folgt, dass

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

g ist ausserdem definiert an der Stelle x_0 und stetig an dem Punkt.

d) f ist stetig, also gilt gemäss Satz aus der Vorlesung

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = 0$$

e) f ist stetig in $(1, 0)$, g ist stetig in $0 = f((1, 0))$

Die Komposition zweier Funktionen ist stetig, also ist

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x) = g \circ f(x_0) = 0$$

f) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{x}$ konvergiert nicht in $x_0 = 0$

Beweis:

Wir wollen zeigen, dass

$$\forall \gamma_0 \in \mathbb{R} \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ |x - x_0| \leq \delta \wedge |f(x) - \gamma_0| > \varepsilon$$

Sei $\gamma_0 \in \mathbb{R}$ beliebig

Wir wählen $\varepsilon := 1$

Sei $\delta > 0$ beliebig

Wir wählen $x := \min\left(\delta, \frac{1}{|\gamma_0| + 2}\right)$

Damit ist $0 < x \leq \delta$, also $|x| = |x - x_0| \leq \delta$

Wir haben ausserdem

$$\begin{aligned} |f(x) - y_0| &= \left| \frac{1}{x} - y_0 \right| \\ &\geq \left| \frac{1}{|y_0|+2} - y_0 \right| \quad \frac{1}{x} \in \left| y_0 \right| + 2 \\ &\geq 2 \\ &> 1 = \varepsilon \quad \square \end{aligned}$$

- g) Die Funktion χ_Q ist unstetig in jedem Punkt in $\mathbb{R}$ und definiert auf ganz $\mathbb{R}$. Sie konvergiert also nicht in x_0 .

7.7

- a) kompakt
- b) kompakt, da abgeschlossen gemäss 7.2c und beschränkt, da Teilmenge von $B_4^2(0)$
- c) kompakt:
 - abgeschlossen, denn $S_r^{n-1}(x_0) = \partial B_r^n(x_0)$ und der Rand einer Menge ist immer abgeschlossen.
 - beschränkt, da Teilmenge von $B_{r+1}^n(x_0)$
- d) nicht kompakt, da unbeschränkt
- e) nicht kompakt, da nicht abgeschlossen
- f) kompakt, da Bild einer kompakten Menge $[0, 1]$ unter einer stetigen Funktion ($f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x) = (e^x, \cos(x))$)

7.8

f ist stetig und definiert auf einer nicht-leeren, kompakten Menge. Also hat f gemäss Satz aus der Vorlesung ein Minimum und ein Maximum.

7.9

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + e^x < 2\} = f^{-1}((-\infty, 2))$

wobei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^2 + e^x$

f ist stetig, also ist das Urbild einer offenen Menge von f offen. $\square$

b) $A = f^{-1}((-\infty, 2])$, f wie in (a)

f ist stetig, also ist das Urbild einer abgeschlossenen Menge von f abgeschlossen. $\square$

$B = f^{-1}(\{2\})$, f wie in (a)

B ist aus demselben Grund wie A abgeschlossen.

Für C kann ein ähnliches Argument verwendet werden.

c) Wie in b gezeigt, sind die Mengen alle abgeschlossen.

Ausserdem gilt

$$\forall x \in A \quad |x| < x^2 + e^x \leq 2 \quad \Rightarrow A \subseteq B_2^1(0)$$

$$\forall x \in B \quad |x| < x^2 + e^x = 2 \quad \Rightarrow B \subseteq B_2^1(0)$$

$$C \subseteq B_4^2(0)$$

Beweis:

Wir definieren $g(x) = x^4 + x$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$g'(x) = 4x^3 + 1$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

Also hat g an der Stelle $x_0 = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ eine Extremalstelle

$$g''(x_0) = 12x_0^2 > 0$$

$\Rightarrow x_0$ ist ein Minimum

Wir haben also

$$x^4 + x = g(x) \geq g(x_0) = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}} \geq -1$$

und

$$\begin{aligned} x^4 + x &= 1 - (y^4 + y) = 1 - g(y) \\ &\leq 1 - g(x_0) = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \leq 2 \end{aligned}$$

Also $x^4 + x \in [-1, 2]$

Falls $x > 1$, so folgt

$$x^4 + x > 1 + 1 = 2 \quad \text{↯} \quad \Rightarrow x \leq 1$$

Falls $x < -2$, so folgt

$$\begin{aligned} x^4 + x &= -x^3(-x-1) \\ &> 8 \cdot (1) = 8 \quad \text{↯} \quad \Rightarrow x \geq -2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow x \in [-2, 1]$ und analog $y \in [-2, 1]$

$$\Rightarrow x^2 \leq 4, y^2 \leq 4 \quad \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 8 < 16$$

$$= \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{16} = 4$$

$$\Rightarrow C \subseteq B_4^2(0)$$

d) Nein, denn sie ist nicht beschränkt:

Wir können y beliebig gross wählen und immer ein x finden, sodass

$$x^3 + x = 1 - y^3 - y$$

denn $x^3 + x$ ist stetig und streng monoton wachsend, also bijektiv.

- a) U Umgebung von $x_0 := 1$ in X heisst, es existiert r , sodass

$$B_r^1(x_0) \cap X \subseteq U \quad \text{also} \quad (x_0 - r, x_0 + r) \cap (-1, 1] \subseteq [0, 1]$$

Tatsächlich existiert so ein r :

$$r = 1:$$

$$B_1^1(x_0) = (x_0 - 1, x_0 + 1) = (0, 2)$$

$$B_1^1(x_0) \cap X = (0, 2) \cap (-1, 1] = (0, 1] \subseteq [0, 1] = U \quad \square$$

- b) Nein, wir können einen Ball $B_r^1(x_0)$ mit beliebigem Radius r betrachten

$$B_r^1(x_0) \cap \mathbb{R} = B_r^1(1) \not\subseteq [0, 1]$$

$$\text{denn } 1 + \frac{r}{2} \in B_r^1(1), \text{ aber } 1 + \frac{r}{2} \notin [0, 1]$$

$$\begin{aligned} \text{c) } A &= \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x^5 + x \leq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [-1, 1]\} \quad (f(x) = x^5 + x) \\ &= f^{-1}([-1, 1]) \end{aligned}$$

f ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$, also folgt nach dem topologischen Kriterium für Stetigkeit, dass das Urbild jeder Umgebung von $f(x_0)$ unter f eine Umgebung von x_0 ist.

Jetzt müssen wir also nur noch überprüfen, dass

$[-1, 1]$ eine Umgebung von $f(x_0) = 0$ ist:

$$0 \in B_1^1(0) = B_1^1(0) \cap \mathbb{R} = (-1, 1) \subseteq [-1, 1] \quad \square$$

7.11

Behauptung: $\text{Im}(f) = [1, \infty)$

$$f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^5 + x + 1$$

Beweis:

1. $(\text{Im}(f) \subseteq [1, \infty))$

Sei $y \in \text{Im}(f)$ beliebig

$$\begin{aligned} \Rightarrow y &= x^5 + x + 1 \quad \text{für ein } x \in [0, \infty) \\ &\geq 0 + 0 + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y \in [1, \infty)$$

Also ist $\text{Im}(f) \subseteq [1, \infty)$

2. $([1, \infty) \subseteq \text{Im}(f))$

Sei $y \in [1, \infty)$ beliebig

$$y \geq 1 = f(0)$$

$$y \leq y^5 + y + 1 = f(y)$$

$$\text{Also } y \in [f(0), f(y)]$$

f ist stetig auf $[0, y]$ und $0 \leq y$, also können wir den Zwischenwertsatz anwenden:

Es gibt also $x \in [0, y]$, so dass

$$y = f(x)$$

$$\Rightarrow y \in \text{Im}(f)$$

Also ist $[1, \infty) \subseteq \text{Im}(f)$ $\square$