

Repetition Topologie

Wir betrachten $A \subseteq \mathbb{R}^n$ für irgendein $n \in \mathbb{N}$

$x \in A$ heisst innerer Punkt von A , falls

$$\exists r \in (0, \infty) \quad B_r^n(x) \subseteq A$$

falls also eine (möglicherweise winzig kleine) Umgebung um x existiert, die auch in A ist.

A heisst offen, falls alle $x \in A$ innere Punkte sind. Also falls

$$\forall x \in A \quad \exists r \in (0, \infty) \quad B_r^n(x) \subseteq A$$

Das Innere von A , geschrieben $\overset{\circ}{A}$, ist die Menge aller inneren Punkte von A . Also

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{A} &\stackrel{\text{def}}{=} \{x \in A \mid x \text{ ist innerer Punkt}\} \\ &= \{x \in A \mid \exists r \in (0, \infty) \quad B_r^n(x) \subseteq A\} \end{aligned}$$

Topologie

Sind die folgenden Mengen offen?
Was ist das Innere der Mengen?

$$A := (0, 1)$$

$$E := \mathbb{N}$$

$$B := [0, 1]$$

$$F := \{0, 1, \pi, e\}$$

$$C := [0, 1)$$

$$G := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0\}$$

$$D := (0, \infty)$$

$$H := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0\}$$

Lösung:

- A ist offen, $\overset{\circ}{A} = A = (0, 1)$
- B ist nicht offen, denn 0 und 1 sind keine inneren Punkte, $\overset{\circ}{B} = (0, 1)$
- C ist nicht offen, denn 0 ist kein innerer Punkt, $\overset{\circ}{C} = (0, 1)$
- D ist offen, $\overset{\circ}{D} = D = (0, \infty)$
- E ist nicht offen, E hat keine inneren Punkte, $\overset{\circ}{E} = \emptyset$
- F ist nicht offen, F hat keine inneren Punkte, $\overset{\circ}{F} = \emptyset$
- G ist offen, $\overset{\circ}{G} = G$
- H ist nicht offen. $(0, 0)$ ist beispielsweise kein innerer Punkt. $\overset{\circ}{H} = G$