

Stetigkeit

Zeige, dass die Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|$ stetig ist auf ganz $\mathbb{R}^n$.

Verwende dafür die umgekehrte Dreiecksungleichung:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x + y\| \quad (1)$$

Lösung:

Wir wollen zeigen, dass gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n \quad \forall \varepsilon \in (0, \infty) \quad \exists \delta \in (0, \infty) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$\|x - x_0\| \leq \delta \Rightarrow \left| \|x\| - \|x_0\| \right| \leq \varepsilon$$

Seien n, x_0, ε wie oben

Wir bemerken:

$$\begin{aligned} \left| \|x\| - \|x_0\| \right| &= \left| \|x\| - \| -x_0 \| \right| \\ &\leq \|x + (-x_0)\| \quad (1) \\ &= \|x - x_0\| \\ &\leq \delta \end{aligned}$$

Also können wir $\delta := \varepsilon$ wählen $\square$

Zeige, dass die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad \text{nicht stetig ist im}$$

Punkt $x_0 = 0$.

Lösung:

f stetig bedeutet

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} \quad |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

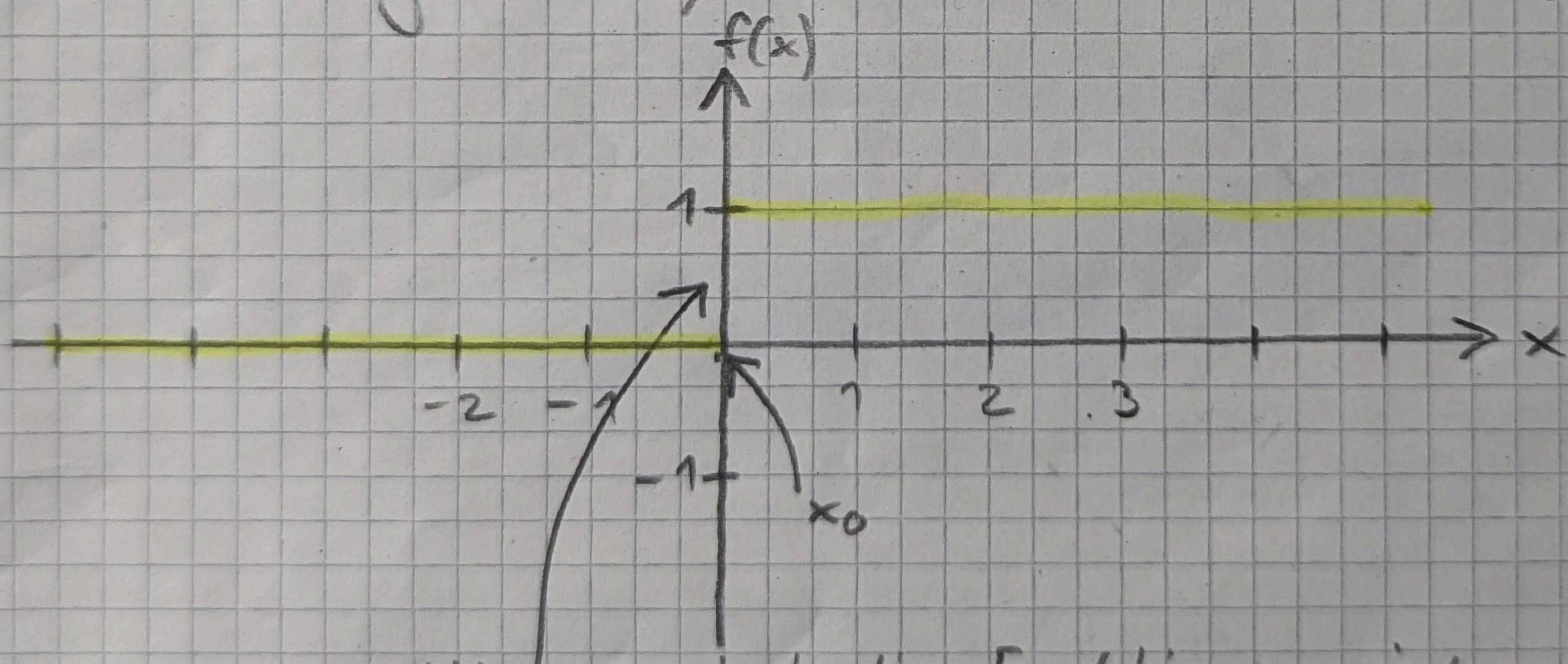
Die Negation ist also

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in \mathbb{R} \quad |x - x_0| \leq \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| > \varepsilon$$

Wenn wir nun noch x_0 einsetzen

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in \mathbb{R} \quad |x| \leq \delta \wedge |f(x)| > \varepsilon$$

Wir überlegen uns, wie die Funktion aussieht:



Hier springt die Funktion zwischen 0 und 1. x_0 ist auf der linken Seite des Sprunges. Wählen wir x also rechts vom Sprung, können wir $|x - x_0|$ beliebig klein werden lassen, während $|f(x) - f(x_0)|$ immer 1 bleibt.

Jetzt müssen wir die Überlegung nur noch formalisieren:

Beweis:

Wir wählen $\varepsilon := \frac{1}{2}$ (jedes $\varepsilon < 1$ funktioniert)

Sei $\delta \in (0, \infty)$ beliebig

Jetzt müssen wir noch x wählen. Wir haben uns überlegt, dass x auf der rechten Seite sein muss, also $x > 0$. Ausserdem muss $|x| \leq \delta$ sein.

Also wählen wir $x := \delta$, denn dann erfüllen wir unsere Bedingungen.

Wir haben jetzt also ein x , für welches gilt:

$$|x - x_0| = |x| \leq \delta$$

und

$$|f(x) - f(x_0)| = |1 - 0| = 1 > \varepsilon$$

Also haben wir gezeigt

$$\exists \varepsilon \in (0, \infty) \forall \delta \in (0, \infty) \exists x \in \mathbb{R} \quad |x - x_0| \leq \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| > \varepsilon$$

$\Rightarrow f$ ist nicht stetig an der Stelle x_0 $\square$