

Berechne den Konvergenzradius der Potenzreihe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$a_n = \sum_{k=0}^n c_k z^k, \quad c_k = 5^n + (-5)^n$$

Der Konvergenzradius ist gegeben durch

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{c_k}}$$

Also müssen wir $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{c_k}$ berechnen.

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{c_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \{ \sqrt[n]{c_n} \mid n \geq k \}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \{ \sqrt[n]{5^n + (-5)^n} \mid n \geq k \}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \{ \sqrt[2n]{5^{2n} + 5^{2n}} \mid 2n \geq k \}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \{ \sqrt[2n]{2} \cdot \sqrt[2n]{5^{2n}} \mid 2n \geq k \}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \{ \sqrt[2n]{2} \cdot 5 \mid 2n \geq k \}$$

$$\rightarrow 1$$

$$= 5$$

Damit erhalten wir also $\underline{\underline{\rho = \frac{1}{5}}}$

Für $a_k = \cos(k\pi)$, berechne $\limsup_{k \rightarrow \infty} a_k$ und $\liminf_{k \rightarrow \infty} a_k$

Lösung:

$$\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \begin{cases} 1, & k = 4n \\ 0, & k = 4n + 1 \\ -1, & k = 4n + 2 \\ 0, & k = 4n + 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sup \left\{ \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) \mid k \geq n, n \in \mathbb{N} \right\} = 1$$

$$\inf \left\{ \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) \mid k \geq n, n \in \mathbb{N} \right\} = -1$$

$$\Rightarrow \limsup_{k \rightarrow \infty} a_k = 1, \quad \liminf_{k \rightarrow \infty} a_k = -1$$

Zeige, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ konvergiert

Lösung mit Quotientenkriterium:

$$\text{Sei } c_n = \frac{n^2}{2^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{1} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2}$$

Also ist $\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ Die Reihe konvergiert

Lösung mit dem Wurzelkriterium:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{2} = \frac{1}{2}$$

Also ist $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ Die Reihe konvergiert