

Serie 5

5.1 $\limsup_{k \rightarrow \infty} (-1)^k \left(1 + \frac{1}{k}\right) = 1$

Denn

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} (-1)^k \left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \left\{ (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \geq k \right\}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad n = \begin{cases} k, & \text{falls } k \text{ gerade} \\ k+1, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= 1 \quad \square$$

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} (-1)^k \left(1 + \frac{1}{k}\right) = -1$$

aus analoger Begründung zu

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} k \left(1 + (-1)^k\right) = \infty$$

Beweis:

Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $a_k = k \left(1 + (-1)^k\right)$

Wir betrachten die Teilfolge $(a_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$:

$$a_{2n} = 2n \left(1 + (-1)^{2n}\right) = 2n \cdot (1+1) = 4n$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \infty$$

Es gilt immer: $\limsup_{k \rightarrow \infty} a_k \geq \lim_{n \rightarrow \infty} a_{k(n)}$

$$\Rightarrow \limsup_{k \rightarrow \infty} a_k = \infty \quad \square$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \inf k (1 + (-1)^k)$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \inf \{ n (1 + (-1)^n) \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \geq k \}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} 0 = \underline{\underline{0}}$$

5.2

a) $a_n = \begin{pmatrix} \frac{n+1}{n} \\ 2^{-n} \end{pmatrix}$

Nach einem Satz aus der Vorlesung konvergiert a_n genau dann, wenn die Komponenten von a_n konvergieren. Und zwar gilt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{pmatrix} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 \end{pmatrix}$$

Wir wissen, dass gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} = 0$$

Also folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

5.2b) Wir gehen nach den Tipps vor:

Als erstes zeigen wir, dass gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (1+\varepsilon)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} \varepsilon^2$$

Beweis:

Wir verwenden den binomischen Lehrsatz:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Für $x = \varepsilon, y = 1$ erhalten wir also

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (1+\varepsilon)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \varepsilon^k$$

$$\text{Für } n \geq 2 \text{ gilt also } (1+\varepsilon)^n \geq \binom{n}{2} \varepsilon^2 = \frac{n(n-1)}{2} \varepsilon^2$$

und für $n=0$ oder $n=1$ ist die Aussage trivial wahr, denn dann ist $\frac{n(n-1)}{2} \varepsilon^2 = 0$. $\square$

Nun zum Beweis der eigentlichen Aussage. Wir wollen zeigen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1, \text{ also } \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \Rightarrow |\sqrt[n]{n} - 1| \leq \varepsilon$$

Beweis:

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig

Wir wählen $n_0 \geq \frac{2}{\varepsilon^2} + 1$ (archimedisches Prinzip)

$$\text{Sei nun } n \geq n_0 \text{ beliebig} \Rightarrow n \geq n_0 \geq \frac{2}{\varepsilon^2} + 1 \Rightarrow \frac{n-1}{2} \varepsilon^2 \geq 1$$

Wir wollen jetzt, wie im Tipp angegeben, zeigen, dass

$$(1+\varepsilon)^n \geq n$$

Wir betrachten also $(1+\varepsilon)^n - n$

$$(1+\varepsilon)^n - n \geq \frac{n(n-1)}{2} \varepsilon^2 - n \quad (\text{wie vorher gezeigt})$$

$$= n \left(\frac{n-1}{2} \varepsilon^2 - 1 \right)$$

$$\geq n(1-1) = 0 \quad \left(\frac{n-1}{2} \varepsilon^2 \geq 1 \right)$$

$$\Rightarrow (1+\varepsilon)^n \geq n$$

Wir verwenden Satz (1) aus den Tipps

$$\Rightarrow 1+\varepsilon \geq \sqrt[n]{n}$$

(folgt auch aus Satz (1))

$$\Rightarrow \varepsilon \geq \sqrt[n]{n} - 1 = |\sqrt[n]{n} - 1| \quad (\text{denn } \sqrt[n]{n} \geq 1)$$

Also haben wir gezeigt, dass $n \geq n_0 \Rightarrow |\sqrt[n]{n} - 1| \leq \varepsilon$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad \square$$

5.2c)

Wir zeigen zuerst, dass $\forall k \in \mathbb{N} \quad (2k)! \geq k^k \quad (1)$

Beweis:

Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig

$$(2k)! = \prod_{n=1}^{2k} n = \underbrace{\left(\prod_{n=1}^k n \right)}_{\geq 1^k} \underbrace{\left(\prod_{n=k+1}^{2k} n \right)}_{\geq k^k} \geq k^k \quad \square$$

Man kann analog zeigen, dass $\forall k \in \mathbb{N} \quad (2k+1)! \geq (k+1)^{k+1} \quad (2)$

Nun wollen wir zeigen, dass $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{\frac{n}{2}}$

Um (1) und (2) verwenden zu können, machen wir eine Fallunterscheidung:

Falls n gerade, also $n = 2k$, können wir (1) anwenden

$$\Rightarrow n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{n!} \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{n}{2}} \quad \square$$

Falls n ungerade, also $n = 2k+1$, können wir (2) anwenden

$$\Rightarrow n! \geq \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}} \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{\frac{n}{2}} \quad \square$$

Und zum Schluss zeigen wir, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$

Also, dass $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \Rightarrow |\sqrt[n]{n!}| \geq \varepsilon$

Beweis:

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig

Wir wollen $\sqrt[n]{n!} \geq \varepsilon$

$\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{\frac{n}{2}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wie vorher gezeigt

Wir wählen also $n_0 \geq 2\varepsilon^2$, denn damit

haben wir für ein beliebiges $n \geq n_0$

$$\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{\frac{n}{2}} \geq \sqrt{\frac{2\varepsilon^2}{2}} \geq \varepsilon \quad \square$$

5.4

a) Seien $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq m$, dann gilt

$$\left| \sum_{k=m}^n x_k \right| \leq \sum_{k=m}^n |x_k| \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$

$$= \sum_{k=m}^n 3^{-k}$$

$$= \sum_{k=1}^n 3^{-k} - \sum_{k=1}^{n-1} 3^{-k}$$

$$= \frac{1 - 3^{-(n+1)}}{1 - 3^{-1}} - \frac{1 - 3^{-n}}{1 - 3^{-1}}$$

$$\left(\sum_{k=1}^n q^k = \frac{1-q^{k+1}}{1-q} \right)$$

$$= \frac{3^{-m} - 3^{-(n+1)}}{1 - \frac{1}{3}} \leq \frac{3^{-m}}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{n \geq m} \left| \sum_{k=m}^n x_k \right| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{n \geq m} \frac{3}{1 - \frac{1}{2^m}}$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{3^{-m}}{1 - \frac{1}{3}} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{n \geq m} \left| \sum_{k=m}^n x_k \right| = 0$$

$\Rightarrow$ Die Reihe konvergiert $\square$

$$b) \neg \forall \varepsilon \in (0, \infty) \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \in \mathbb{N} \quad m \geq n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \exists \varepsilon \in (0, \infty) \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists m, n \in \mathbb{N} \quad m \geq n \geq n_0 \wedge |a_m - a_n| > \varepsilon$$

c)

$$\text{Sei } \varepsilon = \frac{1}{2}$$

Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ beliebig

Wir wählen $n = n_0$, $m = 2n_0$, also gilt $m \geq n \geq n_0$

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &= \left| \sum_{k=1}^{2n_0} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n_0} \frac{1}{k} \right| = \left| \sum_{k=n_0+1}^{2n_0} \frac{1}{k} \right| \\ &= \sum_{k=n_0+1}^{2n_0} \frac{1}{k} > \sum_{k=n_0+1}^{2n_0} \frac{1}{2n_0} = n_0 \cdot \frac{1}{2n_0} = \frac{1}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Also haben wir gezeigt, dass $|a_m - a_n| > \varepsilon$ $\square$

d) a_n konvergiert $\Leftrightarrow a_n$ ist Cauchy-Folge

$\Rightarrow a_n$ ist keine Cauchy-Folge $\Leftrightarrow a_n$ konvergiert nicht

$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ ist keine Cauchy-Folge

$\Rightarrow a_n$ konvergiert nicht $\square$

e) Wir können den Beweis aus (c) auch für die ζ -Reihe machen. Die einzige Anpassung, die nötig ist, ist ein Schritt, in dem wir verwenden, dass $\frac{1}{k^s} \geq \frac{1}{k}$.

5.5

$$a) \rho = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{c_k}} = \frac{1}{1} = \underline{\underline{1}}$$

$$b) \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}} = 0 \Rightarrow \rho = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{c_k}} = \underline{\underline{\infty}}$$

$$c) \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{k!}{k^k} \cdot \frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!} \right|$$
$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k} \cdot \frac{1}{k+1} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)^k}{k^k}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k = e$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right|} = \underline{\underline{\frac{1}{e}}}$$

$$d) \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k^p} = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} \right)^p = 1$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{c_k}} = \underline{\underline{1}}$$

$$e) \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k!}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k!}} = 0$$

$$\Rightarrow \rho = \underline{\underline{\infty}}$$