

Allgemeines Vorgehen Konvergenzbeweis

Wir wollen zeigen, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ für irgendeine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, also dass

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - A| \leq \varepsilon$$

Vorgehen:

1. Vereinfache $|a_n - A|$ so weit wie möglich.

Du kannst Ungleichungen der Form $\leq$ verwenden.

Beispiel: $a_n = \frac{(-1)^n + n + 1}{n}$

$$|a_n - A| = \left| \frac{(-1)^n + n + 1}{n} - 1 \right|$$

$$= \left| \frac{(-1)^n}{n} + 1 + \frac{1}{n} - 1 \right|$$

$$= \left| \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n} \right|$$

Dreiecks-
Ungleichung $\rightarrow \leq \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| + \left| \frac{1}{n} \right|$

$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$$

2. Finde eine Ungleichung, sodass das vorherige Resultat $f(n) \leq f(n_0)$ für alle $n \geq n_0$

Für ein beliebiges $n \geq n_0$ gilt

$$\frac{2}{n} \leq \frac{2}{n_0}$$

3. Forme die Ungleichung $f(n_0) \leq \varepsilon$ nach n_0 um

$$\frac{2}{n_0} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{\varepsilon} \leq n_0$$

4. Setze (1.), (2.) & (3.) zusammen für den eigentlichen Beweis.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig
Wir wählen $n_0 \geq \frac{2}{\varepsilon}$
Sei $n \geq n_0$ beliebig

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig

Wähle n_0 gemäß (3.)

Sei $n \geq n_0$ beliebig

Schliesse, dass aus (1.), (2.) und (3.) folgt, dass

$$|a_n - A| \leq \varepsilon$$

$$|a_n - A| \leq \frac{2}{n} \quad (1.)$$

$$\leq \frac{2}{n_0} \quad (2.)$$

$$\leq \varepsilon \quad (3.)$$