

Grenzwerte

Beweise, dass gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$

Beweis: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n^2}} = 1 \quad \square$

Beweis mit der Definition von Konvergenz:

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig

Wir suchen also n_0 , sodass $\forall n \geq n_0$ gilt

$$\left| \frac{n_0^2}{n_0^2+1} - 1 \right| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{n_0^2}{n_0^2+1} - 1 \right| &= \left| \frac{n_0^2}{n_0^2+1} - \frac{n_0^2+1}{n_0^2+1} \right| = \left| \frac{-1}{n_0^2+1} \right| \\ &= \frac{1}{n_0^2+1} \end{aligned}$$

$$\text{Also } \frac{1}{n_0^2+1} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n_0^2 + 1$$

Falls $\frac{1}{\varepsilon} < 1$ ist obiges trivial wahr

Für $\frac{1}{\varepsilon} \geq 1$, also $\varepsilon \leq 1$ suchen wir also

$$n_0 > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$$

Nach dem archimedischen Prinzip können wir ein solches n_0 finden.

Für ein beliebiges $n \geq n_0$ gilt also auch

$$n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1} \quad \text{und entsprechend} \quad \left| \frac{n^2}{n^2+1} - 1 \right| < \varepsilon \quad \square$$

Beweise, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n = n^2$ divergiert

Sei $A \in \mathbb{R}$ beliebig

Sei $\varepsilon = A$

Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ beliebig

Sei $n = n_0 + A^*$, wobei A^* eine natürliche Zahl ist
mit $A^* > A$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |a_n - A| &= |n^2 - A| = |(n_0 + A^*)^2 - A| \\ &= \underbrace{|n_0^2|}_{>0} + \underbrace{2n_0 A^*}_{>A} + \underbrace{A^{*2} - A}_{>0} \\ &> A = \varepsilon \quad \square \end{aligned}$$

alternativer indirekter Beweis:

Angenommen, a_n konvergiert gegen $A \in \mathbb{R}$

Wir finden also n_0 , so dass $\forall n \geq n_0 \quad |a_n - A| < 2$

Betrachten wir $n = n_0 + 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |a_n - A| &= |n^2 - A| = |(n_0 + 1)^2 - A| \\ &= |n_0^2 + 2n_0 + 1 - A| \geq \underbrace{|2n_0 + 1|}_{\geq 3} - \underbrace{|n_0^2 - A|}_{< 2} \\ &\geq 2 \quad \downarrow \end{aligned}$$

Beweise, dass $a_n = \frac{n^5 + \cos(e^n)}{4n^5 - n^2 + 1}$ konvergiert.

Was ist der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =: a$

Lösung: $a_n \geq b_n = \frac{n^5 - 1}{4n^5 - n^2 + 1}$, $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{4}$

$$a_n \leq c_n = \frac{n^5 + 1}{4n^5 - n^2 + 1}, \quad c = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} = b \leq a \leq c = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{4} \quad \square$$

Beweise, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_0 = 0$, $a_{n+1} = \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 + 1$ konvergiert und finde den Grenzwert.

Tipp: a_n ist monoton wachsend

Lösung:

a_n ist monoton wachsend

Beweis:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 + 1 - a_n \\ &= \frac{1}{4} (a_n^2 - 4a_n + 4) \\ &= \frac{1}{4} (a_n - 2)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_{n+1} \geq a_n \quad \square$$

a_n ist beschränkt (durch 2)

Beweis: (Induktion)

Verankerung: $a_0 = 0 \leq 2$

Induktionsschritt: Sei $a_n \leq 2$

$$a_{n+1} = \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 + 1 \leq \left(\frac{2}{2}\right)^2 + 1 = 1 + 1 = 2 \quad \square$$

a_n ist also monoton wachsend und beschränkt

$\Rightarrow a_n$ konvergiert

Wir finden nun den Grenzwert von a_n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{a_n}{2} \right)^2 + 1 \right), \quad a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\Rightarrow a = \left(\frac{a}{2} \right)^2 + 1$$

$$\Rightarrow a = \frac{a^2}{4} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} (a^2 - 4a + 4) = 0$$

$$\Rightarrow (a-2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{a=2}}$$