

Repetition Dedekind-Schnitte

(5min)

Ein Dedekind-Schnitt x ist eine Menge mit

1. $x \neq \emptyset$
2. $x \neq \mathbb{Q}$
3. $\forall r \in x \forall s \in \mathbb{Q} \quad s > r \Rightarrow s \in x$
4. $\forall r \in x \exists s_0 \in x \quad s_0 < r$

Eine rationale Zahl wird als reelle Zahl dargestellt als

$$[r] = \{s \in \mathbb{Q} \mid s > r\} \in \mathbb{R}$$

Zeige, dass $[2] \cdot [3] = [6]$

(20min)

Wir rufen uns die Definition der Multiplikation ins Gedächtnis:

$$[x] \cdot [y] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \{rs \in \mathbb{Q} \mid r \in x, s \in y\}, & x \geq 0, y \geq 0 \\ \neg(x \cdot y), & x < 0, y \geq 0 \\ \neg(x \cdot \neg y), & x \geq 0, y < 0 \\ \neg(\neg x \cdot \neg y), & x < 0, y < 0 \end{cases}$$

Um die Gleichung zu zeigen, zeigen wir die beiden Inklusionen $[2] \cdot [3] \subseteq [6]$ und $[2] \cdot [3] \supseteq [6]$

1. $[2] \cdot [3] \subseteq [6]$:

Sei $t \in [2] \cdot [3]$ beliebig

$$\Rightarrow t \in \{rs \mid r > 2, s > 3\}$$

$$\Rightarrow t = rs, \quad r > 2, s > 3 \quad \text{für irgendwelche } r, s \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow t > 6$$

2. $[6] \subseteq [2] \cdot [3]$:

Sei $t \in [6]$ beliebig $\Rightarrow t > 6$

Wir definieren $r := \frac{t+2}{4}$, $s := \frac{t}{r}$

$$r = \frac{t+2}{4} > \frac{6+2}{4} = 2 \Rightarrow r > 2$$

$$s = \frac{t}{r} = \frac{4t}{t+2} > \frac{3t+6}{t+2} = 3 \frac{t+2}{t+2} = 3$$

$$\Rightarrow s > 3$$

Es gibt also $r > 2$, $s > 3$, so dass $rs = t$

$$\Rightarrow t \in \{rs \mid r > 2, s > 3\} = \boxed{2} \square \boxed{3} \square$$