

2.2 d) Beweisen Sie, dass $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Lösung: Seien $A, B \subseteq X$

Sei $x \in (A \cap B)^c$ beliebig

$$\begin{aligned}
 x \in (A \cap B)^c &\Leftrightarrow x \notin (A \cap B) \\
 &\Leftrightarrow \neg (x \in A \cap B) \\
 &\Leftrightarrow \neg (x \in A \wedge x \in B) \\
 &\Leftrightarrow \neg (x \in A) \vee \neg (x \in B) \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} &\Leftrightarrow \neg (x \in A \wedge x \in B) \\ &\Leftrightarrow \neg (x \in A) \vee \neg (x \in B) \end{aligned}} \right\} \text{de Morgan} \\
 &\Leftrightarrow (x \notin A) \vee (x \notin B) \\
 &\Leftrightarrow (x \in A^c) \vee (x \in B^c) \\
 &\Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c \quad \square
 \end{aligned}$$

2.5 b) $f = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, G)$, $G = \{(y^2, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$

c) $f = ([0, \infty), \mathbb{R}, G)$, $G = \{(y^2, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$

d) $f = ([0, \infty), \mathbb{R}, G)$, $G = \{(y^2, y) \mid y \in [0, \infty)\}$

b) ist keine Funktion, da

1. negative Zahlen nicht im Graphen sind
2. die Zuordnung nicht eindeutig ist

c) auch hier ist die Zuordnung nicht eindeutig

d) ist nun endlich eine Funktion

(20 min)

2.6 Bestimmen Sie das Bild von $h(x) = e^x$, $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
Es gilt $x \leq e^x \quad \forall x \in [0, \infty)$

Zwischenwertsatz:

Für $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so dass
 $f(a) \leq f(b)$ und $y \in [f(a), f(b)]$. Dann gibt es
ein $x \in [a, b]$, so dass $f(x) = y$

Behauptung: $\text{Im}(h) = (0, \infty)$

Um die Gleichheit zu zeigen zeigen wir

1. $\text{Im}(h) \subseteq (0, \infty)$:

Sei $y \in \text{Im}(h)$ beliebig

$$\Rightarrow y = e^x > 0 \Rightarrow y \in (0, \infty)$$

2. $(0, \infty) \subseteq \text{Im}(h)$:

Sei $y \in (0, \infty)$ beliebig

Falls $y \geq 1$:

Dann ist $y \in [1, \infty)$. $y \leq e^y$, also folgt
 $y \in [e^0, e^y]$.

Zwischenwertsatz $\Rightarrow$ es gibt $x \in [0, y]$, sodass $h(x) = y$

Falls $y < 1$:

Dann ist $y \in (0, 1]$.

Außerdem haben wir $y \leq e^y \Rightarrow \frac{1}{y} \leq e^{\frac{1}{y}} \Rightarrow e^{-\frac{1}{y}} \leq y$
 $\Rightarrow y \in [e^{-\frac{1}{y}}, e^0]$

Zwischenwertsatz $\Rightarrow$ es gibt $x \in [-\frac{1}{y}, 0]$, sodass $h(x) = y$

(5 min)

2.7 a) $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \{\text{gerade Zahlen}\}, f(n) = 2n$
 Zeigen Sie, dass f bijektiv ist

1. Injektivität: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{N}_0 \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{N}_0$ beliebig mit $f(x_1) = f(x_2)$

$$\Rightarrow 2x_1 = 2x_2$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \quad \square$$

2. Surjektivität: $\forall y \text{ gerade } \exists x \in \mathbb{N}_0 \quad f(x) = y$

Sei y eine beliebige gerade Zahl.

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}_0 \quad y = 2k = f(k) \quad \square$$

(10 min)

2.7 f) $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty), f(x) = e^{2x}$
 Zeigen Sie, dass f bijektiv ist

1. Injektivität: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

e^{2x} ist streng monoton wachsend

$$\Rightarrow \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad x_1 < x_2 \Rightarrow e^{2x_1} < e^{2x_2}$$

$$\text{Kontraposition: } \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad e^{2x_1} \geq e^{2x_2} \Rightarrow x_1 \geq x_2$$

Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ beliebig mit $f(x_1) = f(x_2)$

$$\Rightarrow e^{2x_1} = e^{2x_2} \Rightarrow e^{2x_1} \geq e^{2x_2} \text{ und } e^{2x_1} \leq e^{2x_2}$$

$$\Rightarrow x_1 \geq x_2 \text{ und } x_1 \leq x_2$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

2. Surjektivität: $\forall y \in (0, \infty) \exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) = y$

siehe Aufgabe 2.6 $\square$