Notizen zur Übungsstunde vom 23.09.2024

Nicola Bruhin
nbruhin@ethz.ch

Beweise: 12 ist keine Primzahl

Gegeben: Die letzte Ziffer einer Primzahl ist ungerade

Lösung:

Wir wissen „x ist Primzahl" $\Rightarrow$ „x hat eine ungerade letzte Ziffer"

Wir die Kontraposition dieser Aussage:

„x hat eine gerade letzte Ziffer" $\Rightarrow$ „x ist keine Primzahl"

Nun wenden wir den Modus ponens an und schliessen

12 ist keine Primzahl $\square$

Beweise, dass $\log_2(2+\log_2(3)) < 2$. Du darfst verwenden, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $x \le y \Rightarrow 2^x \le 2^y$. (*)

Lösung: (indirekter Beweis)

Wir nehmen an, dass die Aussage falsch ist, also

$2 \le \log_2(2+\log_2(3))$

$\Rightarrow 2^2 \le 2^{\log_2(2+\log_2(3))}$ (*)

$\Rightarrow 4 \le 2+\log_2(3)$ (Definition Logarithmus)

$\Rightarrow 2 \le \log_2(3)$

$\Rightarrow 2^2 \le 2^{\log_2(3)}$ (*)

$\Rightarrow 4 \le 3$ ↯

Die Annahme führt zu einem Widerspruch, also muss die Aussage wahr sein. □

Wir können den Beweis in einem direkten Beweis umschreiben, indem wir (*) kontraponieren:

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $2^x > 2^y \Rightarrow x > y$ (**)

Wir schreiten rückwärts durch unseren vorigen indirekten Beweis:

$4 > 3$ (trivial wahr)

$\Rightarrow 2^2 > 2^{\log_2(3)}$

$\Rightarrow 2 > \log_2(3)$ (**)

$\Rightarrow 4 > 2+\log_2(3)$

$\Rightarrow 2^2 > 2^{\log_2(2+\log_2(3))}$

$\Rightarrow 2 > \log_2(2+\log_2(3))$ (**)

□

Beispiel 2.2.1 ○○○ *Beweise mittels vollständiger Induktion:*

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Lösung: Die zu beweisende Aussage ist

$$A(n): \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$n = 1$ (Verankerung): Wir bestätigen $A(1)$. Es gilt $1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$. $\surd$

$n \Rightarrow n+1$ (Induktionsschritt): Wir nehmen an, dass $A(n)$ richtig ist, d.h.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

(das ist die Induktionsannahme) und zeigen, dass auch $A(n+1)$ stimmt. Mithilfe der Induktionsannahme finden wir

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \overbrace{\boxed{\sum_{k=1}^{n} k}}^{=\frac{n(n+1)}{2}} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n^2+n+2n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Das entspricht genau der Aussage $A(n+1)$.

■

Beispiel 2.2.2 ○○○ *Beweise mittels vollständiger Induktion:*

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Lösung: Die zu beweisende Aussage ist

$$A(n): \qquad \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2.$$

$n = 1$ (Verankerung): Wir bestätigen $A(1)$. Es gilt $(2 \cdot 1 - 1) = 1 = 1^2$. $\surd$

$n \Rightarrow n+1$ (Induktionsschritt): Wir nehmen an, dass $A(n)$ richtig ist und zeigen, dass auch $A(n+1)$ stimmt. Mithilfe der Induktionsannahme finden wir

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = \overbrace{\boxed{\sum_{k=1}^{n} (2k-1)}}^{=n^2} + (2(n+1)-1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Beispiel 2.2.5 ● ○ ○ *Beweise mittels vollständiger Induktion:*

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cap \{0\},\ x \in (0,1).$$

Lösung: Die zu beweisende Aussage ist

$$A(n): \qquad \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

<u>$n=0$ (Verankerung):</u> Wir bestätigen $A(0)$. Es gilt $x^0 = 1 = \frac{1-x^{0+1}}{1-x} = 1$. $\checkmark$
<u>$n \Rightarrow n+1$ (Induktionsschritt):</u> Wir nehmen an, dass $A(n)$ richtig ist und zeigen, dass auch $A(n+1)$ stimmt. Mithilfe der Induktionsannahme finden wir

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \overbrace{\boxed{\sum_{k=0}^{n} x^k}}^{=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}} + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}-x^{n+2}}{1-x} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}.$$

■

Beispiel 2.2.4 ● ○ ○ *Beweise die Bernoullische Ungleichung:* $(1+x)^n \geq 1+nx\ \forall n \in \mathbb{N}, x > -1$.

Lösung: Die zu beweisende Aussage ist

$$A(n): \qquad (1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall x > -1.$$

<u>$n=1$ (Verankerung):</u> Wir bestätigen $A(1)$. Es gilt $(1+x)^1 = 1+x \geq 1+x$. $\checkmark$
<u>$n \Rightarrow n+1$ (Induktionsschritt):</u> Wir nehmen an, dass $A(n)$ richtig ist und zeigen, dass auch $A(n+1)$ stimmt. Mithilfe der Induktionsannahme finden wir

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= \overbrace{\boxed{(1+x)^n}}^{\geq 1+nx} \cdot \overbrace{\boxed{(1+x)}}^{>0} \geq (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x + \overbrace{\boxed{nx^2}}^{\geq 0} \\ &\geq 1+(n+1)x.\end{aligned}$$

■