

Übungen 26.05.2025

Aufgabe 1: Konvergenz von Reihen

Bestimme für jede der folgenden Reihen, ob sie konvergieren.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$
3. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\log(n)}{n}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n!}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+3}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

Aufgabe 2: Konvergenzradius der geometrischen Reihe

Für welche $q \in \mathbb{R}^n$ konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$?

Aufgabe 3: Konvergenzradien von Potenzreihen

Bestimme den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n+3}$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit $a_n = 1$ falls n Primzahl, $a_n = 0$ sonst

Aufgabe 4: Definition der Stetigkeit

Verwende die Definition der Stetigkeit einer Funktion, um zu zeigen, dass die folgenden Funktionen stetig sind.

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := x - 7$
2. $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \sqrt{x}$

Aufgabe 5: Stetigkeit & Topologie

Bestimme für die folgenden Mengen, ob sie offen oder abgeschlossen sind:

1. $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$
2. $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$
3. $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$
4. $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \neq 1\}$