Übungen 26.05.2025

Aufgabe 1: Konvergenz von Reihen

Bestimme für jede der folgenden Reihen, ob sie konvergieren.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ **konvergiert**

   Wir verwenden das Quotientenkriterium:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} \right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{n^2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^{n+1}} \\
&= 1 \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2} < 1
\end{aligned}$$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ **konvergiert**

   Seien $a_n := \frac{1}{n(n+1)}$ und $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$. Es gilt $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Deshalb gilt

$$\begin{aligned}
s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n \\
&= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

   Es folgt also

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= \lim_{n\to\infty} s_n \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

3. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\log(n)}{n}$ **divergiert**

   Es gilt $\forall n > 2 \ \frac{\log(n)}{n} > \frac{1}{n}$ und die harmonische Reihe $s_k := \sum_{n=2}^{k} \frac{1}{n}$ divergiert. Die Reihe muss also auch divergieren.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n!}$ **konvergiert**

   Wir verwenden das Quotientenkriterium:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{4^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{4^n}{n!}}\right| &= \lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{4^n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\quad\frac{4^{n+1}}{4^n}\cdot\frac{n!}{(n+1)!}\\ &= \lim_{n\to\infty}\quad\frac{4}{1}\cdot\frac{1}{n}\\ &= 0 < 1\end{aligned}$$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+3}$ **konvergiert**

   Wir verwenden das Leibniz-Kriterium:

   Sei $a_n := \frac{1}{n+3}$.
   - $a_n \geq 0$
   - a_n ist monoton fallend
   - $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

   Die Bedingungen des Konvergenzkriteriums von Leibniz sind also erfüllt und die Reihe konvergiert.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)^n$ **divergiert**

   Wir verwenden das Wurzelkriterium:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(2+\frac{1}{n}\right)^n\right|} &= \lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)\\ &= 2 > 1\end{aligned}$$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ **divergiert**

   Wir bemerken, dass die Folge $a_n := n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ nicht gegen 0 konvergiert:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\\ &\overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{n^2}\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{-\frac{1}{n^2}}\\ &= 1\end{aligned}$$

   Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kann also nicht konvergieren.

Aufgabe 2: Konvergenzradius der geometrischen Reihe

Für welche $q \in \mathbb{R}$ konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$?

Wir verwenden das Quotientenkriterium:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{q^{n+1}}{q^n}\right| = \lim_{n\to\infty}|q|$$

Folglich konvergiert die Reihe also für $|q| < 1$ und für $|q| > 1$ divergiert sie. Nach zu klären bleiben die Fälle $q = 1$ und $q = -1$. Falls $q = 1$ divergiert die Reihe offensichtlich gegen ∞. Falls $q = -1$, so alterniert die Reihe zwischen 0 und 1, konvergiert also auch nicht.

Zusammengefasst: Die Reihe konvergiert $\Longleftrightarrow q \in (-1, 1)$.

Aufgabe 3: Konvergenzradien von Potenzreihen

Bestimme den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n!}\right|}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$$

   Alternativ kann man das Quotientenkriterium verwenden:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{|x|^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \\ &= \lim_{n\to\infty} |x| \cdot \frac{1}{n+1} \\ &= 0 < 1 \end{aligned}$$

   Die Reihe konvergiert also für alle $x \in \mathbb{R}$, weshalb der Konvergenzradius ∞ sein muss.

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n+3} x^n$

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{2^n}{n+3}\right|}} \\ &= \frac{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+3}}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n}} \end{aligned}$$

   Den oberen Grenzwert können wir wie folgt bestimmen:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+3} &\geq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+3} &\leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4n} \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \\ &= 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

   Es folgt also, dass der Konvergenzradius $\rho = \frac{1}{2}$.

3. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit $a_n = 1$ falls n Primzahl, $a_n = 0$ sonst

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \\ &= \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} a_n} \qquad \left(\text{da } \sqrt[n]{|0|} = 0 \text{ und } \sqrt[n]{|1|} = 1\right) \end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N} \ \sup\{a_k \mid k \geq n\} = 1$, denn es gibt unendlich viele Primzahlen, also gibt es unendlich viele n, sodass $a_n = 1$. Daraus folgt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k \mid k \geq n\} = 1$$

und schliesslich $\rho = 1$.

Aufgabe 4: Definition der Stetigkeit

Verwende die Definition der Stetigkeit einer Funktion, um zu zeigen, dass die folgenden Funktionen stetig sind.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := x - 7$

   Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig
   Sei $\varepsilon > 0$ beliebig
   Sei $\delta = ?$
   Sei $x \in \mathbb{R}$, so dass $\|x - x_0\| \leq \delta$

   $$\begin{aligned} \|f(x) - f(x_0)\| &= \|(x-7) - (x_0 - 7)\| \\ &= \|x - x_0\| \\ &\leq \delta \end{aligned}$$

   Wählen wir $\delta = \varepsilon$ (ersetze das Fragezeichen "?"), so erhalten wir also $\|f(x) - f(x_0)\| \leq \varepsilon$, womit die Stetigkeit gezeigt ist.

2. $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \sqrt{x}$

   Sei $x_0 \in (0,\infty)$ beliebig
   Sei $\varepsilon > 0$ beliebig
   Sei $\delta = ?$
   Sei $x \in (0,\infty)$, so dass $\|x - x_0\| \leq \delta$

   $$\begin{aligned} \|f(x) - f(x_0)\| &= \left\|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right\| \\ &= \left\|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right\| \cdot \frac{\left\|\sqrt{x} + \sqrt{x_0}\right\|}{\left\|\sqrt{x} + \sqrt{x_0}\right\|} \\ &= \frac{\|x - x_0\|}{\left\|\sqrt{x} + \sqrt{x_0}\right\|} \\ &\leq \frac{\delta}{\sqrt{x_0}} \end{aligned}$$

   Wählen wir $\delta = \sqrt{x_0}\,\varepsilon$ (ersetze das Fragezeichen "?"), so erhalten wir also $\|f(x) - f(x_0)\| \leq \varepsilon$, womit die Stetigkeit gezeigt ist.

Aufgabe 5: Stetigkeit & Topologie

Bestimme für die folgenden Mengen, ob sie offen oder abgeschlossen sind:

1. $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$
2. $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$

3. $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$
4. $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \neq 1\}$

Alle diese Mengen sind Urbilder der stetigen Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

Wir rufen uns in Erinnerung, dass eine Funktion $f : X \to Y$ stetig ist genau dann, wenn
- das Urbild $U = f^{-1}(V)$ jeder relativ offenen Menge $V \subset Y$ relativ offen ist.
- das Urbild $A = f^{-1}(B)$ jeder relativ abgeschlossenen Menge $B \subset Y$ relativ abgeschlossen ist.

Aus der Stetigkeit von g folgt also
1. $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\} = g^{-1}(\{1\})$
   $\{1\}$ ist abgeschlossen, also ist die Menge **abgeschlossen**.
2. $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\} = g^{-1}((-\infty, 1))$
   $(-\infty, 1)$ ist offen, also ist die Menge **offen**.
3. $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} = g^{-1}((-\infty, 1])$
   $(-\infty, 1]$ ist abgeschlossen, also ist die Menge **abgeschlossen**.
4. $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \neq 1\} = g^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{1\})$
   $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ ist offen, also ist die Menge **offen**.