Zusammenfassung Untermannigfaltigkeiten

Im Folgenden gilt

- d: Dimension der Untermannigfaltigkeit
- n: Dimension des Raumes $\mathbb{R}^n$, in dem die Untermannigfaltigkeit lebt

Die Spalte "Gültigkeit" enthält nicht alle hinreichenden Bedingungen für die Gültigkeit der Aussagen, sondern lediglich jene, die für typische Anwendungen in Übungsaufgaben und Prüfungen nützlich sind. Die vollständigen Sätze sind im Vorlesungsskript von Herrn Ziltener zu finden.

Ich gebe keine Garantie für die Korrektheit dieser Zusammenfassung. Fehler passieren leider. Falls du einen findest, bitte bei mir melden (Nicola Bruhin, nbruhin@ethz.ch).

Global Parametrisierte Untermannigfaltigkeiten

Name	**Math. Ausdruck**	**Beispiel**	**Gültigkeit**
Definition	$M = \psi(V) = \{\psi(y) \in \mathbb{R}^n \mid y \in V\}$ $V \subset \mathbb{R}^d, \quad \psi : V \to \mathbb{R}^n$	$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_1^2 + y_2^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle\vert\, y_1^2 + y_2^2 < 1 \right\}$ $V = B_1^2(0) \subset \mathbb{R}^2, \quad \psi(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_1^2 + y_2^2 \end{pmatrix}$	ψ ist Einbettung
Tangentialraum	$T_x M = \operatorname{im}(D\psi(\psi^{-1}(x)))$	$D\psi(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2y_1 & 2y_2 \end{pmatrix}, \quad \psi^{-1}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $T_x M_1 = \operatorname{im} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{pmatrix}$ $= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \,\middle\vert\, v \in \mathbb{R}^2 \right\}$	immer
intrinsischer Rand	$\partial M = \psi(\partial V)$	$\partial M_1 = \psi(S_1^1(0)) = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_1^2 + y_2^2 \end{pmatrix} \,\middle\vert\, y \in S_1^1(0) \right\}$ $= \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle\vert\, y_1^2 + y_2^2 = 1 \right\}$	immer
Orientierung	$T(x) = \dfrac{\nabla\psi(\psi^{-1}(x))}{\Vert\nabla\psi(\psi^{-1}(x))\Vert}$	nicht anwendbar, da $d \neq 1$ $(d = 2)$	$d = 1$
Koorientierung (Einheitsnormalen-vektorfeld)	$\nu(x) = \dfrac{D_1\psi(\psi^{-1}(x)) \times D_2\psi(\psi^{-1}(x))}{\Vert D_1\psi(\psi^{-1}(x)) \times D_2\psi(\psi^{-1}(x))\Vert}$	$D_1\psi(y) \times D_2\psi(y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$n = 3$ $d = 2$
Integrale			
allgemeines Integral	$\int_M f(x)\, dx$ $= \int_V f(\psi(y)) \sqrt{\det(D\psi(y)^\top D\psi(y))}\, dy$	$\det(D\psi(y)^\top D\psi(y))) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2y_1 \\ 0 & 1 & 2y_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2y_1 & 2y_2 \end{pmatrix} \right)$ $= \det \begin{pmatrix} 1 + 4y_1^2 & 4y_1y_2 \\ 4y_1y_2 & 1 + 4y_2^2 \end{pmatrix}$ $= 4y_1^2 + 4y_2^2 + 1$ $\int_{M_1} x_3\, dx = \int_{B_1^2(0)} (y_1^2 + y_2^2) \sqrt{4y_1^2 + 4y_2^2 + 1}\, dy$ $= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \sqrt{4r^2 + 1}\, r\, dr\, d\varphi$ $= \ldots = \dfrac{\pi\left(25\sqrt{5} + 1\right)}{60}$	immer
Substitutionsregel	$\int_M f(x)\, dx = \int_V f(\psi(y))\, \lvert\det(D\psi(y))\rvert\, dy$	nicht anwendbar, da $n \neq d$ $(n = 3, d = 2)$	$n = d$

Name	Math. Ausdruck	Beispiel	Gültigkeit
	$\int_M f(x)\,dx$ $= \int_V f(\psi(y))\,\|D_1\psi(y) \times D_2\psi(y)\|\,dy$	$\int_{M_1} x_3\,dx = \int_{B_1^2(0)} (y_1^2+y_2^2) \cdot \left\| \begin{pmatrix} -2y_1 \\ -2y_2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| dy$ $= \int_{B_1^2(0)} (y_1^2+y_2^2)\sqrt{4y_1^2+4y_2^2+1}\,dy$ $= \dots = \frac{\pi\left(25\sqrt{5}+1\right)}{60}$	$n = 3$ $d = 2$

Reguläre Niveauflächen (durch Submersionen definierte Untermannigfaltigkeiten)

Name	Math. Ausdruck	Beispiel	Gültigkeit
Definition	$M = g^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 0\}$ $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}$	$M_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ $g(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1$	0 ist regulärer Wert von g (d.h. g ist Submersion auf M)
Tangentialraum	$T_x M = \ker(Dg(x))$	$T_x M_2 = \ker(2x_1 \;\; 2x_2) = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid (2x_1 \;\; 2x_2)v = 0\}$ $= \{v \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 v_1 + x_2 v_2 = 0\}$	immer
(positive) Orientierung	$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ wobei $\forall x \in M$ $\nabla g(x) \cdot T(x) = 0$ $\|T(x)\| = 1$ $(\det[\nabla g(x), T(x)] > 0)$	$\nabla g(x) \cdot T(x) = 0 \implies 2x_1 T_1(x) + 2x_2 T_2(x) = 0$ $\implies T(x) = c(x) \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$ $\|T(x)\| = 1 \implies T(x) = \pm \frac{1}{\|x\|} \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$ $\left(\det[\nabla g(x), T(x)] > 0 \implies T(x) = \frac{1}{\|x\|} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}\right)$	$d = 1$ $(n = 2)$
nach aussen weisende Koorientierung (Einheitsnormalen-vektorfeld)	$\nu(x) = \frac{\nabla g(x)}{\|\nabla g(x)\|}$	$\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{(2x_1)^2 + (2x_2)^2}} \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} = \frac{x}{\|x\|}$	$n - d = 1$

Integralsätze

Name	Math. Ausdruck	Beispiel	Gültigkeit
Satz von Gauss	$\int_U \nabla \cdot X\,dx = \int_{\partial U, \nu} X \cdot dA \quad \left(= \int_{\partial U} X \cdot \nu\,dA\right)$	$\int_{S_1^1(0), \nu} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot dA = \int_{B_1^2(0)} \nabla \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} dx$ $= \int_{B_1^2(0)} 2\,dx = 2\pi$	$n - d = 1$ • ν nach aussen weisende Koorientierung
Satz von Stokes	$\int_{\Sigma, \nu} (\nabla \times X) \cdot dA \quad \left(= \int_\Sigma (\nabla \times X) \cdot \nu\,dA\right)$ $= \int_{\partial\Sigma, T} X \cdot ds \quad \left(= \int_{\partial\Sigma} X \cdot T\,ds\right)$	$\int_{M_1, \nu} \left(\nabla \times \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ e^{x_1} \end{pmatrix}\right) \cdot dA$ $= \int_{\partial M_1, T} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ e^{x_1} \end{pmatrix} \cdot ds$ $= \int_{S_1^1(0) \times \{1\}} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ e^{x_1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} ds$ $= \int_{S_1^1(0) \times \{1\}} (x_1^2 + x_2^2)\,ds$ $= \int_{S_1^1(0) \times \{1\}} 1\,ds = 2\pi$	$n = 3$ $d = 2$ • T ist durch ν induzierte Orientierung
Satz von Green	$\int_U \nabla \times X\,dx = \int_{\partial U, T} X \cdot ds \quad \left(= \int_{\partial U} X \cdot T\,ds\right)$	$\int_{S_1^1(0), T} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \cdot ds = \int_{B_1^2(0)} \nabla \times \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} dx$ $= \int_{B_1^2(0)} (\partial_1 x_1 - \partial_2 x_2)\,dx$ $= \int_{B_1^2(0)} 0\,dx = 0$	$n = 2$ $d = 1$ • T positive Orientierung