Lösung 3

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} u\cos(v) \\ u\sin(v) \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, u \in (-1,1), v \in (-\pi,\pi) \right\}$$

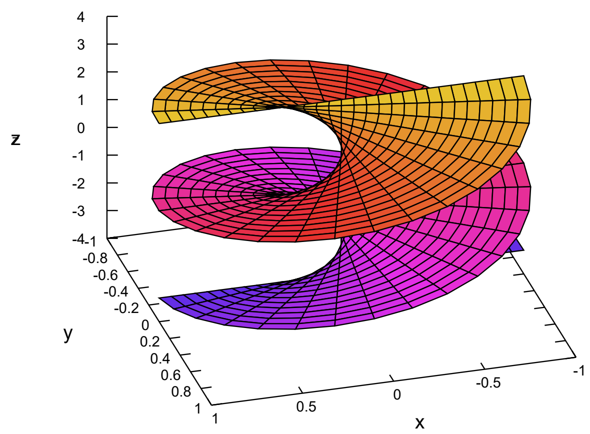

Figure 1: Visualisierung der Helikoide H.[1]

3.A1

Wir verwenden den Satz "Charakterisierung einer Untermannigfaltigkeit" aus dem Vorlesungsskript von Herrn Ziltener.

$$H = \psi(V), \quad V := (-1,1) \times (-\pi,\pi),$$
$$\psi : V \to \mathbb{R}^3, \quad \psi(u,v) := \begin{pmatrix} u\cos(v) \\ u\sin(v) \\ v \end{pmatrix}$$

V ist eine offene Menge, da sie das kartesische Produkt zweier offener Intervalle ist.

ψ ist eine Einbettung:

- $\psi \in C^\infty$, denn alle Komponenten sind Produkte aus glatten Funktionen
- ψ ist eine Immersion:

  $$D\psi(u,v) = \begin{pmatrix} \cos(v) & -u\sin(v) \\ \sin(v) & u\cos(v) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  Die Spalten von $D\psi$ sind linear unabhängig für jedes $(u,v) \in V$. $D\psi$ ist also injektiv.
- ψ ist injektiv:

  Seien $(u_1,v_1),(u_2,v_2) \in V$ mit $\psi(u_1,v_1) = \psi(u_2,v_2)$. Es gilt also

  $$\begin{pmatrix} u_1\cos(v_1) \\ u_1\sin(v_1) \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2\cos(v_2) \\ u_2\sin(v_2) \\ v_2 \end{pmatrix}$$

  und deshalb $v_1 = v_2$ und $u_1 = u_2$, womit die Aussage gezeigt ist.
- ψ^{-1} ist stetig:

  Wir überprüfen zuerst, dass das ψ^{-1}, dass im Tipp gegeben ist tatsächlich die Inverse von ψ ist.

[1]von https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/02/Helicoid.svg (18.05.2025)

$$\psi^{-1}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \cos(x_3) + x_2 \sin(x_3),\, x_3)$$

Es gilt also

$$\begin{aligned}
\psi^{-1}(\psi(u,v)) &= \psi^{-1}(u\cos(v), u\sin(v), v) \\
&= \begin{pmatrix} u\cos(v)\cos(v) + u\sin(v)\sin(v) \\ v \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u(\cos^2(v) + \sin^2(v)) \\ v \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ψ^{-1} ist zusammengesetzt aus C^∞-Funktionen, also sogar C^∞, was die Stetigkeit ($\psi^{-1} \in C^0$) impliziert.

Die Dimension von H ist 2, denn $V \subset \mathbb{R}^2$.

3.A2

Wir erhalten eine Koorientierung von H durch

$$\nu_1(x) = \frac{D_1\psi(\psi^{-1}(x)) \times D_2\psi(\psi^{-1}(x))}{\|D_1\psi(\psi^{-1}(x)) \times D_2\psi(\psi^{-1}(x))\|}$$

Wir bestimmen zuerst

$$D_1\psi(u,v) \times D_2\psi(u,v) = \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -u\sin(v) \\ u\cos(v) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(v) \\ -\cos(v) \\ u \end{pmatrix}$$

und erhalten

$$D_1\psi(\psi^{-1}(x)) \times D_2\psi(\psi^{-1}(x)) = \begin{pmatrix} \sin(x_3) \\ -\cos(x_3) \\ x_1\cos(x_3) + x_2\sin(x_3) \end{pmatrix}$$

Schliesslich folgt

$$\begin{aligned}
\nu_1(x) &= \frac{D_1\psi(\psi^{-1}(x)) \times D_2\psi(\psi^{-1}(x))}{\|D_1\psi(\psi^{-1}(x)) \times D_2\psi(\psi^{-1}(x))\|} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\sin^2(x_3) + \cos^2(x_3) + (x_1\cos(x_3) + x_2\sin(x_3))^2}} \begin{pmatrix} \sin(x_3) \\ -\cos(x_3) \\ x_1\cos(x_3) + x_2\sin(x_3) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + (x_1\cos(x_3) + x_2\sin(x_3))^2}} \begin{pmatrix} \sin(x_3) \\ -\cos(x_3) \\ x_1\cos(x_3) + x_2\sin(x_3) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Die zweite Koorientierung von H ist $\nu_2 := -\nu_1$.

3.A3

Der Tangentialraum von H an einer Stelle x ist gegeben durch

$$
\begin{aligned}
T_x H &= \operatorname{im}(D\psi(\psi^{-1}(x))) \\
&= \operatorname{im}(D\psi(x_1\cos(x_3) + x_2\sin(x_3), x_3)) \\
&= \operatorname{im}\begin{pmatrix} \cos(x_3) & -(x_1\cos(x_3) + x_2\sin(x_3))\sin(x_3) \\ \sin(x_3) & (x_1\cos(x_3) + x_2\sin(x_3))\cos(x_3) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} \cos(x_3) \\ \sin(x_3) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -(x_1\cos(x_3) + x_2\sin(x_3))\sin(x_3) \\ (x_1\cos(x_3) + x_2\sin(x_3))\cos(x_3) \\ 1 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}
$$

3.A4

Wir suchen

$$
\int_H f(x)\ dA, \quad f(x) := \sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2}
$$

Dazu vereinfachen wir zuerst

$$
\begin{aligned}
\int_H f(x)\ dA &= \int_V f(\psi(u,v))\sqrt{\det(D\psi(u,v)^T D\psi(u,v))}\ d(u,v) \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi(u,v))\sqrt{\det\left(\begin{pmatrix} \cos(v) & \sin(v) & 0 \\ -u\sin(v) & u\cos(v) & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(v) & -u\sin(v) \\ \sin(v) & u\cos(v) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)}\ dv\, du \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi(u,v))\sqrt{\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+u^2 \end{pmatrix}}\ dv\, du \\
&= \int_{-1}^{1}\sqrt{1+u^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi(u,v))\ dv\, du
\end{aligned}
$$

Ausserdem gilt $f(\psi(u,v)) = \sqrt{1+u^2}$. Wir berechnen nun das Integral:

$$
\begin{aligned}
\int_H f(x)\ dA &= \int_{-1}^{1}\sqrt{1+u^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi(u,v))\ dv\, du \\
&= \int_{-1}^{1}(1+u^2)\int_{-\pi}^{\pi} 1\ dv\, du \\
&= 2\pi\int_{-1}^{1}(1+u^2)\ du \\
&= 2\pi\left[u + \frac{1}{3}u^3\right]_{u=-1}^{u=1} \\
&= 2\pi\left(1 + \frac{1}{3} - \left(-1 - \frac{1}{3}\right)\right) \\
&= 2\pi\left(\frac{4}{3} + \frac{4}{3}\right) \\
&= \frac{16}{3}\pi
\end{aligned}
$$