Lösung 2

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; t \in [0, 2\pi] \right\}$$

2.A1

$$C = \psi(V), \quad V = [0, 2\pi] \quad \psi : \overline{V} \to \mathbb{R}^2, \qquad \psi(t) = \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$$

V ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}^1$. Die Dimension von C ist folglich 1.

2.A2

Wir verwenden die Parametrisierung, die in der Lösung von **2.A1** gegeben ist, um den intrinsischen Rand zu bestimmen:

$$\partial C_{\text{intr}} = \psi(\partial V) = \psi(\{0, 2\pi\}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\pi \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Wir bestimmen nun den topologischen Rand vom C. Dazu bemerken wir, dass C keine inneren Punkte hat. Denn jeder beliebig kleine Ball um einen beliebigen Punkt in C enthält Punkte, die nicht in C enthalten sind. ($\Rightarrow \mathring{C} = \emptyset$) Wir bemerken ausserdem, dass C abgeschlossen ist. Denn C ist das Bild einer kompakten Menge (V) unter einer stetigen Funktion (ψ). ($\Rightarrow \overline{C} = C$)

Es folgt also

$$\partial C_{\text{topo}} = \overline{C} \setminus \mathring{C} = C \setminus \emptyset = C$$

2.A3

Die Länge einer Kurve ist einfach das Integral der Funktion $f(x) = 1$ über die Kurve:

$$\begin{aligned}
|C| &= \int_C 1 \, dx = \int_0^{2\pi} 1 \cdot \sqrt{\det(D\psi(t)^T D\psi(t))} \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \|D\psi(t)\| \, dt = \int_0^{2\pi} \left\| \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \right\| dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - 2\cos(t) + \cos^2(t)) + \sin^2(t)} \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos(t)} \, dt \overset{\text{Tipp}}{=} \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \, dt \\
&= 2 \int_0^{2\pi} \left| \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right| dt = 2 \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt \\
&= 2 \left[-2\cos\left(\frac{t}{2}\right) \right]_{t=0}^{t=2\pi} = -4(\cos(\pi) - \cos(0)) \\
&= -4(-1 - 1) = 8
\end{aligned}$$