

# Aufgabe 1

## 1.A1 [1 Punkt]

Beispiele von Punkten auf  $\Sigma$ :

$$\begin{pmatrix} \pm 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 2 \end{pmatrix}$$

## 1.A2 [3 Punkte]

Wir definieren

$$g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 + \frac{x_3^2}{9} - 1$$

Es gilt  $\Sigma = g^{-1}(0)$  und 0 ist ein regulärer Wert von  $g$ . Gemäss einem Satz aus der Vorlesung ist der Tangentialraum  $T_x \Sigma$  gegeben durch  $\ker(Dg(x))$ . Daher steht der Gradient  $\nabla g(x)$  senkrecht auf  $T_x \Sigma$ . Wir berechnen:

$$\nabla g(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1 \\ 2x_2 \\ \frac{2}{9}x_3 \end{pmatrix}$$

Die Abbildung  $\nabla g : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist also ein Normalenvektorfeld zu  $\Sigma$ . Um eine Koorientierung zu erhalten, müssen wir noch normieren. Für alle  $x \in \Sigma$  gilt

$$\|\nabla g(x)\| = \sqrt{\left(\frac{x_1}{2}\right)^2 + (2x_2)^2 + \left(\frac{2x_3}{9}\right)^2} = 2\sqrt{\left(\frac{x_1}{4}\right)^2 + x_2^2 + \left(\frac{x_3}{9}\right)^2}$$

Wir erhalten also die Koorientierung  $\nu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  gegeben durch

$$\nu(x) := \frac{\nabla g(x)}{\|\nabla g(x)\|} = \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{x_1}{4}\right)^2 + x_2^2 + \left(\frac{x_3}{9}\right)^2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1 \\ 2x_2 \\ \frac{2}{9}x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{4}\right)^2 + x_2^2 + \left(\frac{x_3}{9}\right)^2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{4}x_1 \\ x_2 \\ \frac{1}{9}x_3 \end{pmatrix}$$

## 1.A3 [3 Punkte]

Wir definieren die Menge

$$U := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid g(x) < 0\}.$$

Das ist ein  $C^1$ -Gebiet mit Rand gegeben durch  $\Sigma$ .  $\nu$  ist die nach aussen weisende Koorientierung des Randes von  $U$ . Gemäss dem Satz von Gauss gilt daher

$$\int_{\Sigma} X \cdot \nu \, dA = \int_{\partial U} X \cdot \nu \, dA = \int_U \nabla \cdot X \, dx,$$

wobei  $\nabla \cdot X$  die Divergenz des Vektorfeldes  $X$  ist. Wir berechnen

$$\nabla \cdot X = \partial_1 x_1 + \partial_2(-3x_2) + \partial_3(2x_3) = 1 - 3 + 2 = 0.$$

Somit gilt

$$\int_{\Sigma} X \cdot \nu \, dA = 0.$$