Aufgabe 3

Sei

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} u\cos(v) \\ u\sin(v) \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; u \in (-1,1), v \in (-\pi, \pi) \right\}$$

Man nennt H ein Helikoide.

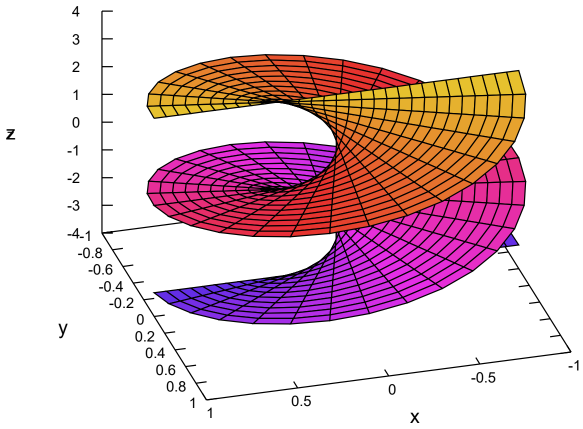

Figure 1: Visualisierung der Helikoide H.[1]

3.A1

Zeige, dass H eine Untermannigfaltigkeit ist. Was ist die Dimension von H?

Tipp: $\psi^{-1}(x_1, x_2, x_3) = (x_1\cos(x_3) + x_2\sin(x_3), x_3)$

3.A2

Finde alle Koorientierungen $\nu_i(x)$ von H.

3.A3

Bestimme den Tangentialraum T_xH von H an jeder beliebigen Stelle $x \in H$. Schreibe den Tangentialraum als $T_xH = \mathrm{span}\{v_1, v_2\}$.

3.A4

Berechne das folgende Integral:

$$\int_H f(x)\,dA, \quad f(x) := \sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2}$$

[1] von https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/02/Helicoid.svg (18.05.2025)