Aufgabe 1

Wir definieren

$$\Sigma \;:=\; \Big\{\, x \in \mathbb{R}^3 \;\Big|\; \frac{x_1^2}{4} \,+\, x_2^2 \,+\, \frac{x_3^2}{9} \;=\; 1 \Big\}.$$

Das ist eine kompakte zweidimensionale glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$. (Sie brauchen das nicht zu beweisen.)

1.A1 [1 Punkt]

Geben Sie drei verschiedene Punkte an, die auf Σ liegen.

1.A2 [3 Punkte]

Berechnen Sie eine Koorientierung (= Einheitsnormalenvektorfeld) ν auf Σ.
Bemerkungen:

- Sie brauchen den berechneten Ausdruck für ν nicht zu vereinfachen.
- Sie brauchen nicht zu beweisen, dass das berechnete ν tatsächlich eine Koorientierung ist.

Von jetzt an bezeichne ν die von Ihnen berechnete Koorientierung.

1.A3 [3 Punkte]

Wir betrachten das Vektorfeld

$$X : \mathbb{R}^3 \;\longrightarrow\; \mathbb{R}^3, \qquad X(x) \;:=\; \begin{pmatrix} x_1 \\ -3\,x_2 \\ 2\,x_3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Fluss

$$\int_\Sigma X \,\cdot\, \nu \, dA.$$

Bemerkungen:

- Sie können diese Teilaufgabe selbst dann lösen, wenn Sie die obigen Teilaufgaben nicht lösen konnten.
- Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die von Σ eingeschlossene Menge ein C^1–Gebiet ist.
- Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass der Rand eines Gebietes durch eine bestimmte Menge (nämlich Σ) gegeben ist.