Problem 4. Extremwerte [11 Punkte]

Es sei:

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 4\} \subset \mathbb{R}^2$$

Man betrachte die Funktion:

$$f : S \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) := x^2 + y^2 - y^3 + 7$$

(a) [**4 Punkte**] Beweisen Sie, dass S kompakt ist. D.h. prüfen Sie explizit, dass S die nötigen Eigenschaften für eine kompakte Menge besitzt. Argumentieren Sie zudem, warum die Funktion f sein globales Maximum und Minimum auf S annehmen muss.

(b) [**2 Punkte**] Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f im Inneren von S.

(c) [**4 Punkte**] Bestimmen Sie alle Kandidaten für Extrema auf dem Rand ∂S von S.

(d) [**1 Punkt**] Was ist das globale Maximum und das globale Minimum von f auf S?

Problem 4. Extremwerte [11 Punkte]

Es sei:

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 4\} \subset \mathbb{R}^2$$

Man betrachte die Funktion:

$$f : S \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) := x^2 + y^2 - y^3 + 7$$

(a) [**4 Punkte**] Beweisen Sie, dass S kompakt ist. D.h. prüfen Sie explizit, dass S die nötigen Eigenschaften für eine kompakte Menge besitzt. Argumentieren Sie zudem, warum die Funktion f sein globales Maximum und Minimum auf S annehmen muss.

(b) [**2 Punkte**] Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f im Inneren von S.

(c) [**4 Punkte**] Bestimmen Sie alle Kandidaten für Extrema auf dem Rand ∂S von S.

(d) [**1 Punkt**] Was ist das globale Maximum und das globale Minimum von f auf S?

Solution. (a) Wir bertachten die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x, y) = x^2+4y^2$. Die Funktion ist stetig als Polynom und somit ist $g^{-1}(\{[0, 4]\})$ abgeschlossen als Urbild einer abgschlossenen Teilmenge unter einer stetigen Funktion ([**1 Punkt**] für Abgeschlossenheit, auch wenn über Folgen oder Offenheit des Komplements argumentiert wird). Die Menge ist zudem beschränkt, denn:

$$x^2 \leq x^2 + 4y^2 \leq 4 \Rightarrow |x| \leq 2$$

Analog findet man:

$$4y^2 \leq x^2 + 4y^2 \leq 4 \Rightarrow |y| \leq 1$$

Folglich gilt für alle $(x, y) \in S$:

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5} < +\infty,$$

also ist die Menge S auch beschränkt ([**1 Punkt**], wenn in irgendeiner Form Beschränktheit bewiesen wird). Gemäss einem Satz aus der Vorlesung ist S also kompakt ([**1 Punkt**]).

Da f als Polynom stetig ist und S kompakt, folgt aus dem Extremumssatz, dass f sein globales Maximum und Minimum auf S annimmt ([**1 Punkt**]).

Bemerkungen zur Korrektur:

- Abgeschlossenheit: Wird nur über die definierende Ungleichung argumentiert, so muss die Stetigkeit erwähnt werden der linken Seite. Aussagen wie "Der Rand von S liegt in S, also ist die Menge abgeschlossen." geben ohne weitere Ausführungen keine Punkte. Direkte Argumentation über Satz aus der Vorlesung benötigt kein explizites erwähnen von Stetigkeit (da die Anwendung dies implizit klar macht).
- Beschränktheit: Es reicht, auf die definierende Ungleichung zu verweisen.
- Kompaktheit: Punkt, wenn Relation gegeben wird, auch wenn in falsche Richtung für die gegebene Situation (also kompakt → beschränkt und stetig, statt anders herum).
- Extremumssatz: Erwähnen reicht, keine Bedingungen müssen für diesen Punkt geprüft werden (stetig, kompakt). Andere Sätze, sofern korrekt wiedergegeben und angewendet, geben auch den Punkt.

Alternative Lösung: Kompaktheit kann auch über Folgen nachgewiesen werden. Dann [**1 Punkt**] für das Beziehen auf das geeignete Resultat aus der Vorlesung und [**1 Punkt**] für die Anwendung von Bolzano-Weierstrass für konvergente Teilfolgen in Komponenten. Schluss, dass also die ganze Teilfolge konvergiert, ergibt nochmals [**1 Punkt**].

(b) Die kritischen Punkte sind gegeben durch:

$$df(x,y) = (0,0)$$

Daher suchen wir Punkte (x, y) mit:

$$0 = \partial_x f(x,y) = 2x, \quad 0 = \partial_y f(x,y) = 2y - 3y^2$$

Dieses Gleichungssystem gibt [**1 Punkt**]. Die erste Gleichung impliziert $x = 0$ und die zweite ergibt:

$$2y - 3y^2 = 0 \Rightarrow y = 0, \frac{2}{3}$$

Dies ergibt [**1 Punkt**], wenn x, y bestimmt wurden. Man prüft leicht nach, dass:

$$(0,0), (0, 2/3) \in S,$$

also sind dies die gesuchten kritischen Punkte.

Bemerkung: Es gibt 0.5 Punkte je korrekt bestimmtes Extremum.

(c) Auf dem Rand gilt $g(x,y) := x^2 + 4y^2 = 4$ (Dies muss nicht begründet werden). Wir verwenden also Lagrange-Multiplikatoren und wollen $(x,y) \in \partial S$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ finden, sodass:

$$df(x,y) + \lambda dg(x,y) = 0, \quad g(x,y) = 0.$$

Also:

$$2x + 2\lambda x = 0, \quad 2y - 3y^2 + 8\lambda y = 0, \quad x^2 + 4y^2 = 4.$$

Dieses System ergibt [**1 Punkt**]. Betrachtet man die erste Gleichung, so sehen wir:

$$2x(1+\lambda) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ oder } \lambda = -1$$

Wenn $x = 0$, dann folgt aus $4 = x^2 + 4y^2 = 4y^2$ sofort, dass $y = \pm 1$. Also sind folgende Punkte Kandidaten:

$$(0,1), (0,-1)$$

Diese sind [**1 Punkt**] wert. Falls $\lambda = -1$, dann finden wir mit der zweiten Gleichung:

$$0 = 2y - 3y^2 - 8y = -6y - 3y^2 = -3y(2+y),$$

also:

$$y = 0 \text{ oder } y = -2$$

Ersteres führt zu:

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2,$$

also:

$$(2,0), (-2,0),$$

was [**1 Punkt**] wert ist. Zweiteres führt zu $4 = x^2 + 4(-2)^2 = x^2 + 8$, also $x^2 = -4$, was ein Widerspruch zu x reell ist ([**1 Punkt**]). Somit sind die kritischen Punkte genau:

$$(2,0), (-2,0), (0,1), (0,-1)$$

Bemerkung:

- $\det(\nabla f(x,y), \nabla g(x,y)) = 0$ ist nur notwendig und nicht hinreichend, gibt also keinen Punkt als Ersatz für Gleichungssystem. Beachte den Fall $\nabla g = 0$.
- Die Parametrisierung $\gamma(t) = (2\cos(t), \sin(t))$ und das Lösen der Gleichung $\frac{d}{dt}(f(\gamma(t))) = 0$ gibt 1 Punkt für die Idee und 1 Punkt für die korrekte Parametrisierung. Berechnung der Extrema wie in Alternative oben.
- 0.5 Punkte je eigentlichem Extremum, 1 Punkt für komplexes Extremum ($x^2 = -4$).
- Das Gleichungssystem ergibt auch Punkte, wenn die rechte Seite der Gleichung nicht explizit ist.
- Falls $y = -2$ gefunden, aber kommentarlos fallen gelassen wird, so gibt dies 1 Punkt, da angenommen wird, dass Widerspruch wahrgenommen wurde. Die Berechung muss aber korrekt sein (falscher Wert für y gibt keine Punkte!).

Alternative Lösung: Man kann auch verwenden, dass auf ∂S gilt: $x^2 = 4 - 4y^2$, also:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - y^3 + 7 = 11 - 3y^2 - y^3,$$

was [**1 Punkt**] gibt. Da $-1 \leq y \leq 1$, müssen wir nun also nur noch die Funktion:

$$h : [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad h(y) := 11 - 3y^2 - y^3,$$

optimieren ([**1 Punkt**]). Kritisch sind $y = \pm 1$ als Randpunkte ([**1 Punkt**]) und Punkte mit $h'(y) = -6y - 3y^2 = 0$, was genau $y = 0, -2$ ergibt und $y \geq -1$ die Lösung $y = -2$ ausschliesst ([**1 Punkt**]). Somit erhalten wir dieselben kritischen Punkte.

(d) Einsetzen der kritischen Punkte zeigt:

$$f(0,0) = 7, f(0,2/3) = 7 + \frac{4}{27}, f(2,0) = f(-2,0) = 11, f(0,1) = 7, f(0,-1) = 9$$

Da f sein Maximum und Minimum annimmt, muss er dies in einem kritischen Punkt machen und dort kennen wir nun die Werte, also:

$$\max_{(x,y)\in S} f(x,y) = 11, \quad \min_{(x,y)\in S} f(x,y) = 7$$

Dies ist nochmals [**1 Punkt**] wert.

Bemerkung:

- Ausser bei Folgefehler zählt nur das Resultat.
- Bei Folgefehler gibt es trotzdem einen halben Punkt Abzug falls weniger als 4 Werte berechnet werden.
- 0.5 Punkte pro Max./Min.
- Keine Abzüge für Rechenfehler ohne Auswirkung auf Resultat.

□