# Aufgabe 5

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = xy - x^2 + 4y$$

und das folgende Gebiet in $\mathbb{R}^2$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y \leq 1\}.$$

**5.A1 [1 Punkt]** Skizzieren Sie das Gebiet $D$.

**5.A2 [2 Punkte]** Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von $f$ im Inneren von $D$

Wir betrachten nun den Rand $\partial D$ von $D$.

**5.A3 [2 Punkte]** Bestimmen Sie alle Kandidaten für Extrema auf dem Randstück

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1,\ y = 1\}$$

**5.A4 [2 Punkte]** Bestimmen Sie alle Kandidaten für Extrema auf dem Randstück

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1,\ y = x^2\}$$

**5.A5 [1 Punkt]** Was ist das globale Maximum und das globale Minimum von $f$ auf $D$?

*Hinweis:* Denken Sie daran auch die Punkte in $\partial D$ zu erwägen, welche nicht in einem der Randstücke aus den beiden vorherigen Teilaufgaben enthalten sind, also die Eckpunkte von $D$.

# Aufgabe 5

Gegeben sei die Funktion

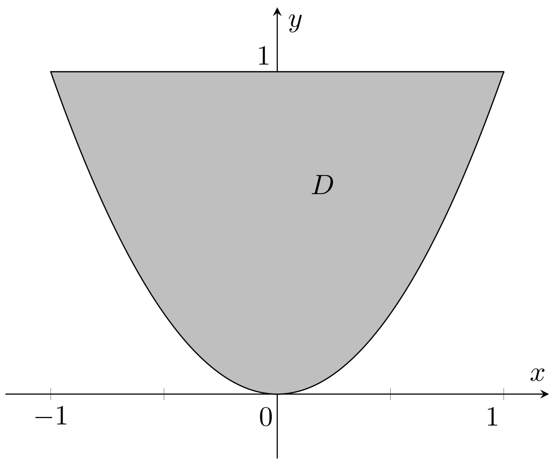
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = xy - x^2 + 4y$$

und das folgende Gebiet in $\mathbb{R}^2$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y \leq 1\}.$$

**5.A1 [1 Punkt]** Skizzieren Sie das Gebiet $D$.

**Lösung:**




**5.A2 [2 Punkte]** Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von $f$ im Inneren von $D$

**Lösung:**

Das Differential von $f$ ist

$$df(x,y) = (y - 2x\,,\; x + 4)$$

Die kritischen Punkte befinden sich bei $df(x,y) = 0$, also bei $(x,y)$, sodass

$$\begin{aligned} y - 2x &= 0 \\ x + 4 &= 0 \end{aligned}$$

Lösen dieses Gleichungssystems ergibt $(-4, -8)$ als einziger kritischer Punkt von $f$. Da dieser Punkt nicht in $D$ liegt, hat $f$ keine kritischen Punkte im Inneren von $D$.

Wir betrachten nun den Rand $\partial D$ von $D$.

**5.A3 [2 Punkte]** Bestimmen Sie alle Kandidaten für Extrema auf dem Randstück

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1,\ y = 1\}$$

**Lösung:**

Wir parametrisieren dieses Randstück durch

$$\gamma : ]-1,1[ \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t,1)$$

Dann ist $f$ entlang des Randstücks gegeben durch

$$f(\gamma(t)) = -t^2 + t + 4$$

Die kritischen Punkte dieser Funktion sind bestimmt durch $\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = 0$, also

$$-2t + 1 = 0$$

Der einzige kritische Punkt ist somit bei $t = \frac{1}{2}$. Dies entspricht in $\mathbb{R}^2$ dem Punkt $\gamma(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}, 1)$, welcher somit ein Kandidat für ein Extrema ist.

Alternativ kann man auch die Lagrange-Multiplikator Methode verwenden. Die Nebenbedingung ist gegeben durch $g(x,y) = 0$ mit $g(x,y) = 1 - y$. Wir führen die Variable $\lambda$ ein und berechnen

$$f(x,y) + \lambda g(x,y) = xy - x^2 + (4-\lambda)y + \lambda$$

Das Differential lautet

$$d(f(x,y) + \lambda g(x,y)) = \big(y - 2x\,,\ x + (4-\lambda)\big)$$

Die kritischen Punkte von $f$ auf $y = 1$ sind also gegeben durch

$$\begin{aligned} y - 2x &= 0 \\ x + (4-\lambda) &= 0 \\ 1 - y &= 0 \end{aligned}$$

Die erste und dritte Gleichung zusammen liefern sofort $x = \frac{1}{2}$, $y = 1$. Die zweite Gleichung ist dann durch $\lambda = \frac{9}{2}$ erfüllt. Also ist $(\frac{1}{2}, 1)$ Kandidat für ein Extrema.

**5.A4 [2 Punkte]** Bestimmen Sie alle Kandidaten für Extrema auf dem Randstück

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1,\ y = x^2\}$$

**Lösung:**

Wir parametrisieren dieses Randstück durch

$$\gamma : ]-1,1[ \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t, t^2)$$

Einsetzen in $f$ ergibt

$$f(\gamma(t)) = t^3 + 3t^2$$

Wieder sind die kritischen Punkte von $f$ entlang dem Randstück bestimmt durch $\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = 0$, also

$$3t^2 + 6t = 0$$

Diese Gleichung hat zwei Lösungen: $t = 0$ und $t = -2$. Dies entspricht in $\mathbb{R}^2$ den Punkten $\gamma(0) = (0,0)$ und $\gamma(-2) = (-2,4)$. Wir bemerken, dass $(-2,4)$ nicht in $D$ liegt, hingegen $(0,0)$ schon. Somit ist $(0,0)$ Kandidat für ein Extrema in $D$.

Alternativ kann man auch die Lagrange-Multiplikator Methode verwenden. Die Nebenbedingung ist gegeben durch $g(x,y) = 0$ mit $g(x,y) = x^2 - y$. Wir führen die Variable $\lambda$ ein und berechnen

$$f(x,y) + \lambda g(x,y) = xy - (1-\lambda)x^2 + (4-\lambda)y$$

Das Differential lautet

$$d(f(x,y) + \lambda g(x,y)) = \Big(y - 2(1-\lambda)x\,,\; x + (4-\lambda)\Big)$$

Die kritischen Punkte von $f$ auf $y = x^2$ sind also gegeben durch

$$\begin{aligned} y - 2(1-\lambda)x &= 0 \\ x + (4-\lambda) &= 0 \\ x^2 - y &= 0 \end{aligned}$$

Die ersten zwei Gleichungen ergeben $x = \lambda - 4$ und $y = 2(1-\lambda)(\lambda - 4)$. Eingesetzen in die dritte Gleichung gibt

$$(\lambda - 4)^2 = 2(1-\lambda)(\lambda - 4)$$

Eine Lösung ist gegeben durch $\lambda = 4$ und somit $(x,y) = (0,0)$. Falls $\lambda \neq 4$, können wir $(\lambda - 4)$ kürzen und erhalten

$$\lambda - 4 = 2(1-\lambda),$$

also $\lambda = 2$. Dies entspricht dem Punkt $(x,y) = (-2,4)$.

**5.A5 [1 Punkt]** Was ist das globale Maximum und das globale Minimum von $f$ auf $D$?

*Hinweis:* Denken Sie daran auch die Punkte in $\partial D$ zu erwägen, welche nicht in einem der Randstücke aus den beiden vorherigen Teilaufgaben enthalten sind, also die Eckpunkte von $D$.

**Lösung:**

Wir haben als Kandidaten die Punkte $(0,0)$ und $(\frac{1}{2},1)$ gefunden. Zusätzlich müssen wir noch die Eckpunkte bei $(-1,1)$ und $(1,1)$ erwägen. Einsetzen in $f$ ergibt

$$f(0,0)=0, \quad f(\frac{1}{2},1)=4+\frac{1}{4}=\frac{17}{4}, \quad f(-1,1)=2, \quad f(1,1)=4$$

Wir sehen, dass das globale Maximum $\frac{17}{4}$ bei $(\frac{1}{2},1)$ ist, und das globale Minimum 0 bei $(0,0)$ ist.