Lösungen Taylorentwicklung

Prüfungsaufgabe aus dem FS23:

1.MC24 [1 Punkt] Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \frac{x}{y}$$

um den Punkt $(0, 1)$.

(A) $T_2 f((x, y); (0, 1)) = 1 + x - (y - 1)$

(B) $T_2 f((x, y); (0, 1)) = x - x(y - 1)$

(C) $T_2 f((x, y); (0, 1)) = x + x^2 - xy$

(D) $T_2 f((x, y); (0, 1)) = x - x^2 - (y - 1)^2$

Lösung:

$$\boxed{T_2 f((x, y); (0, 1)) = x - x(y - 1)}$$

Übungsaufgabe aus dem FS23: (siehe folgende Seiten)

10.1. Taylorentwicklung in 2D

(a) Man bemerke, dass man alle partiellen Ableitungen beliebiger Ordnung ausrechnen kann und dass diese stets aus Produkten, Quotienten und Kompositionen stetiger Funktionen wie Polynomen, der Exponentialfunktion oder auch Brüchen mit Nenner, welcher ein Polynom ohne reelle Nullstellen ist, bestehen. Daher sind alle partiellen Ableitungen stetig und somit $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, was genau die gesuchte Aussage ist.

(b) Wir berechnen die Taylorentwicklung direkt. Alternativ könnte man die Potenzreihen-Entwicklungen der Summanden betrachten und so auf die korrekte Lösung kommen.

Zuerst ist klar, dass:

$$f(0,0) = 1$$

Zudem:

$$\begin{aligned}
\partial_x f(x,y) &= 2xe^{x^2+y^2} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{y}{1+x^2y^2} \\
\partial_y f(x,y) &= 2ye^{x^2+y^2} + \frac{x}{1+x^2y^2}
\end{aligned}$$

Direktes Einsetzen zeigt nun also:

$$df(0,0) = (0,0)$$

Wir wenden uns den partiellen Ableitungen zweiter Ordnung zu:

$$\begin{aligned}
\partial_{xx} f(x,y) &= 2e^{x^2+y^2} + 4x^2e^{x^2+y^2} + \frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} - \frac{2xy^3}{(1+x^2y^2)^2} \\
\partial_{xy} f(x,y) &= 4xye^{x^2+y^2} + \frac{1+x^2y^2-2x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2} \\
\partial_{yy} f(x,y) &= 2e^{x^2+y^2} + 4y^2e^{x^2+y^2} - \frac{2x^3y}{(1+x^2y^2)^2}
\end{aligned}$$

Dank des Satzes von Schwarz (Satz 7.5.1) wissen wir zudem $\partial_{xy} f(x,y) = \partial_{yx} f(x,y)$. Einsetzen zeigt:

$$Hess_f(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Wir müssen nun noch die partiellen Ableitungen dritter Ordnung bestimmen. Diese verschwinden alle in $(0,0)$, wie wir nun zeigen. Wir müssen nur vier der möglichen

Permutationen von Ableitungen nach x und y berechnen, die anderen Permutationen folgen dank der Symmetrie der Ableitungen, also Satz 7.5.1:

$$\begin{aligned}
\partial_{xxx} f(x,y) &= 12xe^{x^2+y^2} + 8x^3e^{x^2+y^2} + 2\frac{-2x(1+x^2)^2 - 4x(1-x^2)(1+x^2)}{(1+x^2)^4} \\
&\quad - \frac{2y^3(1+x^2y^2)^2 - 8x^2y^5(1+x^2y^2)}{(1+x^2y^2)^4} \\
\partial_{xxy} f(x,y) &= 4ye^{x^2+y^2} + 8x^2ye^{x^2+y^2} - \frac{6xy^2(1+x^2y^2)^2 - 8x^3y^4(1+x^2y^2)}{(1+x^2y^2)^4} \\
\partial_{xyy} f(x,y) &= 4xe^{x^2+y^2} + 8xy^2e^{x^2+y^2} - \frac{6x^2y(1+x^2y^2)^2 - 8x^4y^3(1+x^2y^2)}{(1+x^2y^2)^4} \\
\partial_{yyy} f(x,y) &= 12ye^{x^2+y^2} + 8y^3e^{x^2+y^2} - \frac{2x^3(1+x^2y^2)^2 - 8x^5y^2(1+x^2y^2)}{(1+x^2y^2)^4}
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen sieht man, dass alle partiellen Ableitungen dritter Ordnung verschwinden. Es folgt daher:

$$\begin{aligned}
T_f^3((x,y);(0,0)) &= f(0,0) + \partial_x f(0,0)x + \partial_y f(0,0)y + \frac{1}{2}\partial_{xx} f(0,0)x^2 \\
&\quad + \partial_{xy} f(0,0)xy + \frac{1}{2}\partial_{yy} f(0,0)y^2 + \frac{1}{6}\partial_{xxx} f(0,0)x^3 + \frac{1}{2}\partial_{xxy} f(0,0)x^2y \\
&\quad + \frac{1}{2}\partial_{xyy} f(0,0)xy^2 + \frac{1}{6}\partial_{yyy} f(0,0)y^3 \\
&= 1 + 2x^2 + xy + y^2
\end{aligned}$$

(c) Wir setzten $y = x$ und berechnen:

$$g(x) = f(x,x) = e^{2x^2} + \log(1+x^2) + \arctan(x^2)$$

Wir betrachten die drei Summanden separat. Für die folgenden Funktionen sind die Taylor-Entwicklungen um $t = 0$ bis zweiter Ordnung gegeben durch:

$$\begin{aligned}
e^t &\simeq 1 + t + \frac{t^2}{2} \\
\log(1+t) &\simeq t - \frac{t^2}{2} \\
\arctan(t) &\simeq t
\end{aligned}$$

Setzen wir nun $2x^2$ bzw. x^2 ein für t, so finden wir also:

$$\begin{aligned}
e^{2x^2} &\simeq 1 + 2x^2 + \frac{4x^4}{2} \\
\log(1+x^2) &\simeq x^2 - \frac{x^4}{2} \\
\arctan(x^2) &\simeq x^2
\end{aligned}$$

Dies sind die Taylorpolynome bis 4.Grades. Somit sehen wir aber auch:

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x,x) \\ &= e^{2x^2} + \log(1+x^2) + \arctan(x^2) \\ &\simeq 1 + 4x^2 = T_g^3(x;0), \end{aligned}$$

was somit, aufgrund der Linearität der Taylor-Entwicklung, das Taylorpolynom dritten Grades von g ist (den x^4 Term haben wir weggeworfen, da nur nach der Taylor-Entwicklung bis dritte Ordnung gefragt wurde). Alternativ kann man das Taylorpolynom direkt durch Ableiten von $g(x)$ finden.

Setzen wir im Taylorpolynom 3.Grades zu $f(x,y)$ nun $x = y$, so sehen wir:

$$T_f^3((x,x);(0,0)) = 1 + 4x^2,$$

also:

$$T_f^3((x,x);(0,0)) = T_g^3(x;0)$$

Dies illustriert den Zusammenhang aus Bemerkung 7.5.2.