Repetition Satz über implizite Funktionen

Wir haben gegeben $f(x, y) = 0$. y, x dürfen Vektoren sein. Physikalische Gesetze sind beispielsweise von dieser Form (siehe Beispiel weiter unten). Unser Ziel ist es, y als Funktion von x auszudrücken, also eine Funktion g zu finden, sodass $f(x, g(x)) = 0$.

Der Satz über implizite Funktionen sagt, dass wir eine solche Funktion finden können, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
- Wir kennen einen Punkt (x_0, y_0), wo $f(x_0, y_0) = 0$
- $D_y f(x_0, y_0)$ ist invertierbar

Ausserdem gilt dann, dass

$$D_x g(x) = -\left(D_y f(x, g(x))\right)^{-1} D_x f(x, g(x))$$

Hinweis: Es ist möglich, dass es so eine Funktion g nur in einer kleinen Umgebung von x_0, y_0 gibt.

Beispiel

Wir betrachten einen Regentropfen (oder sonst ein kleines fallendes Objekt). Unsere Beobachtung beginnen wir an einer Stelle, wo der Tropfen Position x_0 und Geschwindigkeit v_0 hat. Aus der klassischen Mechanik wissen wir, dass die Bewegung des Tropfens Energie-erhaltend sein muss.

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgx = E \coloneqq \frac{1}{2}mv_0^2 + mgx_0$$

Wir definieren

$$f(x, v) \coloneqq \frac{1}{2}mv^2 + mgx - E$$

Und aus der Energieerhaltung würden wir erwarten, dass $f(x, v) = 0$.

Wir überprüfen nun die Bedingungen:
- $f(x_0, v_0) = 0$, denn die Energie ist ja gerade so definiert, dass diese Bedingung erfüllt ist.
- $$D_v f(x_0, v_0) = mv_0 \neq 0 \quad \forall v_0 \neq 0$$

Wir können den Satz also anwenden, sofern der beobachtete Regentropfen sich zu Beginn unserer Beobachtung nicht in Ruhe befindet. Es folgt also:
- Wir können die Geschwindigkeit v als eine Funktion von x schreiben in einer Umgebung des Punktes (x_0, v_0).
- Die Ableitung der Geschwindigkeit nach x ist in einer Umgebung von x_0 gegeben durch

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial x}(x) &= -\left(\frac{\partial f}{\partial v}(x, v(x))\right)^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, v(x)) \\
&= -\frac{1}{mv(x)} \qquad\qquad \cdot mg \\
&= -\frac{g}{v(x)}
\end{aligned}$$

Aufgabe

Wir schauen uns jetzt dasselbe Beispiel in 2 Dimensionen an. Das Teilchen kann jetzt also nicht mehr nur in x-Richtung fallen, sonder kann sich ausserdem in y-Richtung bewegen. Die Energieerhaltung schreibt sich nun also als

$$\frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2\right) + mgx = E := \frac{1}{2}m\left(v_{x,0}^2 + v_{y,0}^2\right) + mgx_0$$

Da wir uns in 2 Dimensionen befinen, benötigen wir ein weiteres Gesetz, die Impulserhaltung in y-Richtung:

$$mv_y = p_y := mv_{y,0}$$

1. Was ist in diesem Fall die Funktion $f\left(x, y, v_x, v_y\right)$?
2. Wann sind die Bedingungen des Satzes über implizite Funktionen erfüllt?
3. Wenn die Bedingungen erfüllt sind, was ist $Dv(x, y)$?

Lösung

1. $$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y, v_x, v_y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + mgx - E \\ mv_y - p_y \end{pmatrix}$$

2. Erneut ist $f(x_0, y_0, v_{x,0}, v_{y,0}) = 0$ per Definition von E und p_y.

$$D_v f(x_0, y_0, v_{x,0}, v_{y,0}) = \begin{pmatrix} mv_x & mv_y \\ 0 & m \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} v_x & v_y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist invertierbar solange $v_x \neq 0$.

3. $$\left(D_v f(x, y, v_x, v_y)\right)^{-1} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} v_x & v_y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} \frac{1}{v_x} & -\frac{v_y}{v_x} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir haben also

$$\begin{aligned} Dv(x, y) &= -\left(D_v f(x, y, v_x, v_y)\right)^{-1} D_x f(x, y, v_x, v_y) \\ &= -\frac{1}{m} \begin{pmatrix} \frac{1}{v_x} & -\frac{v_y}{v_x} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} mg & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{m} \begin{pmatrix} \frac{mg}{v_x} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{g}{v_x} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nicht überraschend erhalten wir also dasselbe Resultat wie im vorherigen Beispiel.

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{g}{v_x}$$

Und alle die anderen partiellen Ableitungen sind 0.