Übungen Differentialgleichungen

Aufgabe 1

a)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ist der Lösungsraum der Differentialgleichung ein Vektorraum? Falls ja, was ist dessen Dimension?

b)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 4x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ist der Lösungsraum der Differentialgleichung ein Vektorraum? Falls ja, was ist dessen Dimension?

c)
Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 4x, \quad f(0) = 0, f'(0) = 0$$

Aufgabe 2

a)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$f'''(x) + 3f''(x) + 3f'(x) + f(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ist der Lösungsraum der Differentialgleichung ein Vektorraum? Falls ja, was ist dessen Dimension?

b)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$f'''(x) + 3f''(x) + 3f'(x) + f(x) = -e^{-2x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ist der Lösungsraum der Differentialgleichung ein Vektorraum? Falls ja, was ist dessen Dimension?

c)
Schreiben Sie die Differentialgleichung aus Teilaufgabe (b) als äquivalente Differentialgleichung 1. Ordnung unter Verwendung vektorwertiger Funktionen

$$F'(x) = AF(x) + b(x),$$
$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ A \in \mathbb{R}^{3\times3},\ b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

d)
Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$f'''(x) + 3f''(x) + 3f'(x) + f(x) = 0,$$
$$f(2) = 0,\ f'(-1) = 0,\ f''(3) = 0$$

Aufgabe 3

a)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$f''(x) + f(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Die Lösung soll keine komplexen Zahlen oder komplex-wertigen Funktionen enthalten.

b)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$f''(x) + f(x) = 0, \quad f(0) = 2, \, f'(0) = -1$$