Lösungen Differentialgleichungen

Aufgabe 1

a)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ist der Lösungsraum der Differentialgleichung ein Vektorraum? Falls ja, was ist dessen Dimension?

Lösung:

Charakteristisches Polynom: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda \in \{1, 2\}$

Die allgemeine Lösung ist also

$$\boxed{f(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

Gemäss dem Superpositionsprinzip ist das in der Tat ein reeller Vektorraum der Dimension 2.

b)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$\boxed{f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 4x, \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

Ist der Lösungsraum der Differentialgleichung ein Vektorraum? Falls ja, was ist dessen Dimension?

Lösung:

Wir verwenden die homogene Lösung f_{homo} aus Teilaufgabe (a). Es bleibt also noch eine partikuläre Lösung f_{part} zu finden. Wir machen den Ansatz $f_{\text{part}}(x) = ax + b$. Es folgt also

$$\begin{aligned}
4x &= f_{\text{part}''}(x) && - 3f_{\text{part}'}(x) + 2f_{\text{part}(x)} \\
&= 0 && - 3a \qquad + 2(ax + b) \\
&= 2ax + (2b - 3a) \\
&\Rightarrow a = 2, b = 3 \\
&\Rightarrow f_{\text{part}}(x) = 2x + 3
\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung ist

$$\boxed{f(x) = f_{\text{hom}}(x) + f_{\text{part}}(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + 2x + 3}$$

Der Lösungsraum ist kein Vektorraum, da die Differentialgleichung inhomogen ist.

c)
Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 4x, \quad f(0) = 0, f'(0) = 0$$

Lösung:

Wir verwenden die allgemeine Lösung aus Teilaufgabe (b):

$$\begin{aligned} f(x) &= c_1 e^x + c_2 e^{2x} + 2x + 3 \\ f'(x) &= c_1 e^x + 2c_2 e^{2x} + 2 \end{aligned}$$

Aus den Anfangsbedingungen erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} f(0) &= c_1 + c_2 + 3 = 0 \\ f'(0) &= c_1 + 2c_2 + 2 = 0 \end{aligned}$$

Es sind also $c_1 = -4$ und $c_2 = 1$ und damit

$$\boxed{f(x) = -4e^x + e^{2x} + 2x + 3}$$

Aufgabe 2

a)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$f'''(x) + 3f''(x) + 3f'(x) + f(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ist der Lösungsraum der Differentialgleichung ein Vektorraum? Falls ja, was ist dessen Dimension?

Lösung:

Charakteristisches Polynom: $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$

Die allgemeine Lösung ist also

$$f(x) = (a + bx + cx^2)e^{-x}$$

Gemäss dem Superpositionsprinzip ist das in der Tat ein reeller Vektorraum der Dimension 3.

b)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$f'''(x) + 3f''(x) + 3f'(x) + f(x) = -e^{-2x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ist der Lösungsraum der Differentialgleichung ein Vektorraum? Falls ja, was ist dessen Dimension?

Lösung:

Wir verwenden die homogene Lösung f_{homo} aus Teilaufgabe (a). Es bleibt also noch eine partikuläre Lösung f_{part} zu finden. Eine partikuläre Lösung die funktioniert, ist

$$f_{\text{part}}(x) = e^{-2x}$$

Die allgemeine Lösung ist

$$\boxed{f(x) = f_{\text{hom}}(x) + f_{\text{part}}(x) = (a + bx + cx^2)e^{-x} + e^{-2x}}$$

Der Lösungsraum ist kein Vektorraum, da die Differentialgleichung inhomogen ist.

c)

Schreiben Sie die Differentialgleichung aus Teilaufgabe (b) als äquivalente Differentialgleichung 1. Ordnung unter Verwendung vektorwertiger Funktionen

$$F'(x) = AF(x) + b(x),$$
$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ A \in \mathbb{R}^{3\times 3},\ b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

Lösung:

Wir definieren

$$F(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ f'(x) \\ f''(x) \end{pmatrix}$$

Es folgt also

$$\begin{aligned} F'(x) = \begin{pmatrix} f'(x) \\ f''(x) \\ f'''(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f'(x) \\ f''(x) \\ -f(x) - 3f'(x) - 3f''(x) - e^{-2x} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f'(x) \\ f''(x) \\ -f(x) - 3f'(x) - 3f''(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -e^{-2x} \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}}_{=:A} F(x) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -e^{-2x} \end{pmatrix}}_{=:b} \end{aligned}$$

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}, \quad b(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -e^{-2x} \end{pmatrix}}$$

d)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$f'''(x) + 3f''(x) + 3f'(x) + f(x) = 0,$$
$$f(2) = 0,\ f'(-1) = 0,\ f''(3) = 0$$

Lösung:

Eine offensichtliche Lösung dieses Anfangswertproblems ist

$$\boxed{f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der Lösung linearer, homogener Differentialgleichungen ist diese die einzige Lösung.

Aufgabe 3

a)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$f''(x) + f(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Die Lösung soll keine komplexen Zahlen oder komplex-wertigen Funktionen enthalten.

Lösung:

Charakteristisches Polynom: $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$

Die allgemeine Lösung ist also

$$f(x) = c_1 e^{ix} + c_2 e^{-ix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Die Lösung soll keine komplexen Zahlen oder komplex-wertigen Funktionen enthalten, also verwenden wir die Eulersche Formel:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

Es folgt

$$\begin{aligned} f(x) &= c_1 e^{ix} + c_2 e^{-ix} \\ &= c_1 \cos(x) + ic_1 \sin(x) + c_2 \cos(-x) + ic_2 \sin(-x) \\ &= c_1 \cos(x) + ic_1 \sin(x) + c_2 \cos(x) - ic_2 \sin(x) \\ &= \underbrace{(c_1 + c_2)}_{=:a} \cos(x) + \underbrace{i(c_1 - c_2)}_{=:b} \sin(x) \end{aligned}$$

Schliesslich erhalten wir also

$$\boxed{f(x) = a\cos(x) + b\sin(x), \quad a, b \in \mathbb{R}}$$

b)
Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$f''(x) + f(x) = 0, \quad f(0) = 2,\, f'(0) = -1$$

Lösung:

Wir verwenden die allgemeine Lösung aus Teilaufgabe (a):

$$\begin{aligned} f(x) &= \quad a\cos(x) + b\sin(x) \\ f'(x) &= -a\sin(x) + b\cos(x) \end{aligned}$$

Aus den Anfangsbedingungen erhalten wir

$$\begin{aligned} f(0) &= a = \quad 2 \\ f'(0) &= b = -1 \end{aligned}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$\boxed{f(x) = 2\cos(x) - \sin(x)}$$