19.2.1 Beispiele

Für die Berechnung von Flussintegralen kann man folgendes Kochrezept anwenden.

KOCHREZEPT FÜR FLUSSINTEGRALE

Gegeben: Vektorfeld $\vec{v}$, Fläche S **Gesucht:** Flussintegral $\iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} do$

Schritt 1: Parametrisiere die Fläche S, d.h. finde

$$\Phi : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}^3, (u, v) \to \Phi(u, v) = (\Phi_1(u, v), \Phi_2(u, v), \Phi_3(u, v))$$

Schritt 2: Berechne $\Phi_u = \frac{\partial \Phi}{\partial u}$ und $\Phi_v = \frac{\partial \Phi}{\partial v}$ indem du jede Komponente von Φ nach u respektive v partiell ableitest. Berechne ferner das Kreuzprodukt

$$\Phi_u \times \Phi_v$$

Schritt 3: Benutze die Formel

$$\int_S \vec{v} \cdot \vec{n} do = \pm \int_a^b \int_c^d \vec{v}(\Phi(u, v)) \cdot (\Phi_u \times \Phi_v) du dv$$

Entscheide nach dem Vorzeichen (je nach Situation).

Die korrekte Wahl des Vorzeichens ist für die Studenten immer ein Problem. Mein Tipp: Kontrolliert immer, dass der in Schritt 2 berechnete Vektor $\Phi_u \times \Phi_v$ in die korrekte Richtung zeigt, wie in der Aufgabenstellung gefragt wird (z.B. von innen nach aussen oder von aussen nach innen). Falls die Richtung falsch wäre (z.B.: Es wird der Fluss von innen nach aussen gefragt, aber $\Phi_u \times \Phi_v$ zeigt nach innen), dann schreibe einfach ein Minuszeichen per Hand.

Beispiel 19.2.1 •○○ *Es sei das Vektorfeld $\vec{v} = (xz, z, y)$ gegeben. Gesucht ist der Fluss von $\vec{v}$ von innen nach aussen durch die Oberfläche S der Einheitskugel mit Mittelpunkt $O = (0, 0, 0)$.*

Lösung: Für die Berechnung des Flussintegrals $\int_S \vec{v} \cdot \vec{n} do$ gehen wir die drei Schritte des Kochrezeptes durch.

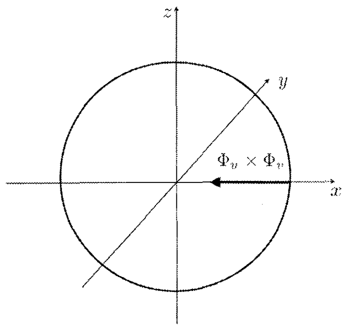
Schritt 1: Wir parametrisieren S mit Kugelkoordinaten

$$\Phi : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3, (u, v) \to \Phi(u, v) = \begin{pmatrix} \sin v \cos u \\ \sin v \sin u \\ \cos v \end{pmatrix}.$$

Schritt 2: Wir rechnen den Normalvektor aus

$$\Phi_u = \begin{pmatrix} -\sin v \sin u \\ \sin v \cos u \\ 0 \end{pmatrix}, \Phi_v = \begin{pmatrix} \cos v \cos u \\ \cos v \sin u \\ -\sin v \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \Phi_u \times \Phi_v = \begin{pmatrix} -\sin^2 v \cos u \\ -\sin^2 v \sin u \\ -\sin v \cos v \end{pmatrix}.$$

Wir kontrollieren, dass die Richtung von $\Phi_u \times \Phi_v$ korrekt ist. Wir wollen den Fluss durch S von Innen nach aussen bestimmen. Somit verlangen wir, dass $\Phi_u \times \Phi_v$ nach aussen zeigt. Wie kann man das kontrollieren? Am besten setzt man ein paar Werte für die Parameter u, v ein. Für $u = 0$ und $v = \pi/2$ bekommen wir zum Beispiel den Vektor $(-1, 0, 0)$. Dieser Vektor zeigt nach innen.



Somit müssen wir den berechneten Vektor $\Phi_u \times \Phi_v$ per Hand mit (-1) multiplizieren

$$\begin{pmatrix} -\sin^2 v \cos u \\ -\sin^2 v \sin u \\ -\sin v \cos v \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{nach aussen}} \begin{pmatrix} \sin^2 v \cos u \\ \sin^2 v \sin u \\ \sin v \cos v \end{pmatrix}.$$

Schritt 3: Wir benutzen die Formel für das Flussintegral und finden

$$\begin{aligned}
\int_S \vec{v} \cdot \vec{n} do &= \int_0^{2\pi} du \int_0^{\pi} dv \begin{pmatrix} \sin v \cos v \cos u \\ \cos v \\ \sin v \sin u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin^2 v \cos u \\ \sin^2 v \sin u \\ \sin v \cos v \end{pmatrix} \\
&= \int_0^{2\pi} du \int_0^{\pi} dv (\sin^3 v \cos v \cos^2 u + 2 \sin^2 v \cos v \sin u) \\
&= \int_0^{\pi} dv \int_0^{2\pi} \sin^3 v \cos v \cos^2 u du + 2 \int_0^{\pi} dv \int_0^{2\pi} \sin^2 v \cos v \sin u du \\
&= \int_0^{\pi} \sin^3 v \cos v \left[\frac{1}{2}(\sin u \cos u + u)\right]_0^{2\pi} dv + 2 \int_0^{\pi} \sin^2 v \cos v \left[-\cos u\right]_0^{2\pi} dv \\
&= \pi \int_0^{\pi} \sin^3 v \cos v dv + 0 = \pi \left[\frac{\sin^4 v}{4}\right]_0^{\pi} = 0.
\end{aligned}$$

19.3 Satz von Gauss

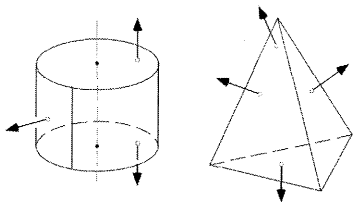
Der Satz von Gauss vereinfacht die Berechnung von Flussintegralen via Umwandlung in Volumenintegrale. In einer seiner einfachsten Formen lautet der Satz von Gauss so

Satz 19.3.1 (Gauss) *Es sei ein beschränkter räumlicher Bereich V mit Rand $\partial V \in C^1_{pw}$ gegeben, es sei das Vektorfeld $\vec{v}$ auf ganz V definiert und stetig differenzierbar. Dann gilt:*

$$\int_{\partial V} \vec{v}\cdot\vec{n}do = \int_V div(\vec{v})d\mu$$

wobei $\vec{n}$ die nach aussen gerichtete Normale längs ∂V bezeichnet.

Bemerkung: Beim Satz von Gauss: Fluss immer von innen nach aussen!



Beispiel 19.3.1 ● ○ ○ *Wir wollen den Fluss von $\vec{v} = (xz, z, y)$ durch die Einheitskugel um $O = (0,0,0)$ mithilfe des Satzes von Gauss berechnen.*

Lösung: Da $\vec{v}$ ein Vektorfeld der Klasse C^1 und die Einheitskugel Rand des Einheitsballes B_1 ist, gilt nach dem Satz von Gauss

$$\int_S \vec{v}\cdot\vec{n}do = \int_{B_1} \mathrm{div}(\vec{v})d\mu.$$

Dazu rechnen wir zuerst die Divergenz von $\vec{v}$ aus

$$\mathrm{div}(\vec{v}) = z + 0 + 0 = z.$$

Somit gilt (wir benutzen Kugelkoordinaten: $dxdydz = r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi$)

$$\int_S \vec{v}\cdot\vec{n}do = \int_{B_1} zd\mu = \int_0^1 r^2dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot r\cos\theta = \int_0^1 r^3dr \int_0^\pi \sin\theta\cos\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= 2\pi \int_0^1 r^3 \left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^\pi dr = 0.$$