Vorbesprechung Übung 8, Lösung

a)

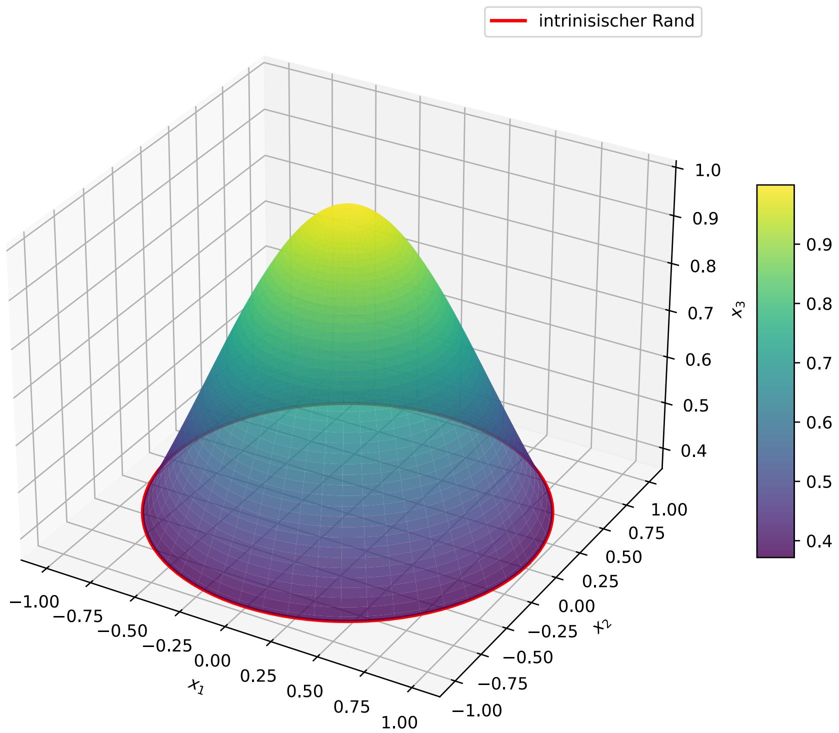

Figure 1: Visualisierung der Menge Σ

b) Eine mögliche globale Parametrisierung der Menge ist (V, ψ).

$$V := \{y \in \mathbb{R}^2 \mid y_1^2 + y_2^2 < 1\} = B_1^2(0)$$

$$\psi : \overline{V} \to \mathbb{R}^3, \quad \psi(y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ e^{-(y_1^2+y_2^2)} \end{pmatrix}$$

Um zu zeigen, dass das obige Tupel eine globale Parametrisierung ist, müssen wir noch zeigen, dass V ein beschränktes, offenes C^∞-Gebiet ist. Da $V = B_1^2(0)$ wissen wir bereits, dass das der Fall ist. Wir müssten ausserdem zeigen, dass ψ eine C^∞-Einbettung ist und, dass das Bild von ψ die Menge Σ ist. Das werden wir hier nicht mehr tun.

c) Wir bestimmen zuerst den intrinsischen Rand:

$$\begin{aligned}\partial\Sigma &= \psi(\partial V)\\ &= \psi(S_1^1(0))\\ &= \{\psi(y) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in S_1^1(0)\}\\ &= \left\{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ e^{-(y_1^2+y_2^2)}\end{pmatrix} \mid y \in S_1^1(0)\right\}\\ &= \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ e^{-1}\end{pmatrix} \mid x \in S_1^1(0)\right\}\\ &= S_1^1(0) \times \left\{\frac{1}{e}\right\}\end{aligned}$$

Der topologische Rand $\partial_{\text{topo}}\Sigma$ ist einfach die Menge Σ selbst. Der Grund dafür ist, dass $\partial_{\text{topo}}\Sigma = \overline{\Sigma} \setminus \mathring{\Sigma}$. Der Abschluss $\overline{\Sigma} = \Sigma$, da Σ abgeschlossen ist und das Innere $\mathring{\Sigma} = \emptyset$. Es folgt also, dass $\partial_{\text{topo}}\Sigma = \Sigma$.

d) Für eine Mannigfaltigkeit der Dimension 2 in $\mathbb{R}^3$ erhalten wir eine Koorientierung durch

$$\nu(x) = \frac{D_1\psi(y) \times D_2\psi(y)}{\|D_1\psi(y) \times D_2\psi(y)\|}, \quad y := \psi^{-1}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen also

$$D\psi(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2y_1 e^{-(y_1^2+y_2^2)} & -2y_2 e^{-(y_1^2+y_2^2)} \end{pmatrix}$$

Es folgt also

$$\begin{aligned} D_1\psi(x) \times D_2\psi(x) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2x_1 e^{-(x_1^2+x_2^2)} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2x_2 e^{-(x_1^2+x_2^2)} \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 0 - \left(-2x_1 e^{-(x_1^2+x_2^2)}\right) \\ 0 - \left(-2x_2 e^{-(x_1^2+x_2^2)}\right) \\ 1 - \qquad 0 \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 2x_1 e^{-(x_1^2+x_2^2)} \\ 2x_2 e^{-(x_1^2+x_2^2)} \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Die Norm ist

$$\begin{aligned}\|D_1\psi(x) \times D_2\psi(x)\| &= \left\| \begin{pmatrix} 2x_1 e^{-(x_1^2+x_2^2)} \\ 2x_2 e^{-(x_1^2+x_2^2)} \\ 1 \end{pmatrix} \right\|\\ &= \sqrt{4x_1^2 e^{-2(x_1^2+x_2^2)} + 4x_2^2 e^{-2(x_1^2+x_2^2)} + 1}\end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$
\begin{aligned}
\nu(x) &= \frac{D_1\psi(y) \times D_2\psi(y)}{\|D_1\psi(y) \times D_2\psi(y)\|} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4x_1^2 e^{-2(x_1^2+x_2^2)} + 4x_2^2 e^{-2(x_1^2+x_2^2)} + 1}} \begin{pmatrix} 2x_1 e^{-(x_1^2+x_2^2)} \\ 2x_2 e^{-(x_1^2+x_2^2)} \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Die 2. Koorientierung ist einfach $-\nu$.

e) Da (V, ψ) eine globale Parametrisierung ist, ist die durch ν induzierte Orientierung von $\partial\Sigma$ ist gegeben durch

$$
T(x) = \frac{D\psi(y) \cdot \tilde{T}(y)}{\left\|D\psi(y) \cdot \tilde{T}(y)\right\|}, \quad y = \psi^{-1}(x)
$$

wobei $\tilde{T}$ die positive Orientierung von $\partial V = S^1$ sein muss. Wir erinnern uns, dass die positive Orientierung des Einheitskreises S^1 gegeben ist durch $\tilde{T}(x) = \left(\begin{smallmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{smallmatrix}\right)$.

$$
\begin{aligned}
D\psi(y) \cdot \tilde{T}(y) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2y_1 e^{-(y_1^2+y_2^2)} & -2y_2 e^{-(y_1^2+y_2^2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

f) Der Flächeninhalt von Σ berechnet sich durch

$$
\begin{aligned}
\int_\Sigma 1 \, dA &= \int_{\overline{V}} \sqrt{\det((D\psi(y))^\top D\psi(y))} \, dy \\
&= \int_{\overline{V}} \|D_1\psi(y) \times D_2\psi(y)\| \\
&= \int_{\overline{V}} \sqrt{4y_1^2 e^{-2(y_1^2+y_2^2)} + 4y_2^2 e^{-2(y_1^2+y_2^2)} + 1} dy \\
&= \int_{\overline{B^2}} \sqrt{4\|y\|^2 e^{-2\|y\|^2} + 1} \, dy \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{4r^2 e^{-2r^2} + 1} \, r \, d\varphi dr \\
&= 2\pi \int_0^1 r \sqrt{4r^2 e^{-2r^2} + 1} \, dr
\end{aligned}
$$

Dieses Integral auszuwerten ist sehr schwierig / nicht möglich. Wir könnten numerische Methoden verwenden, um den Wert des Integrals zu approximieren.