Übungen Woche 8

Fläche des Kreises: Variante 1

Wir möchten gerne die Fläche des Einheitskreises bestimmen.

$$|B_1^2(0)| = \int_{B_1^2(0)} 1 \, dx$$

Eine Möglichkeit ist, die Definition des Integrals und des Kreises zu verwenden.

$$\int_{B_1^2(0)} 1 \, dx = \int_0^1 \int_0^1 \chi_{B_1^2(0)}(x, y) \, dy dx$$

Die Funktion $\chi_{B_1^2(0)}$ ist die Indikatorfunktion des Kreises. Sie ist 1, wenn $(x, y) \in B_1^2(0)$ und 0 sonst. Entsprechend können wir das Integral umschreiben, indem wir Werte ausschließen, die nicht im Einheitskreis liegen.

$$\int_0^1 \int_0^1 \chi_{B_1^2(0)}(x, y) \, dy dx = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 \, dy dx$$

Dieses Integral können wir jetzt ausrechnen.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 \, dy dx &= \int_0^1 2\sqrt{1-x^2} \, dx \\ &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos(t) \, dt \quad (\text{Substitution: } x = \sin(t)) \\ &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) \, dt \end{aligned}$$

Das ist ein bekanntes Integral, das sich durch partielle Integration lösen lässt.

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) \, dt &= [\sin(t) \cos(t)]_{t=-\frac{\pi}{2}}^{t=\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) \, dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos^2(t) \, dt \end{aligned}$$

Es folgt also

$$2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) \, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dt = \pi$$

Die Fläche des Einheitskreises ist also π .

Fläche des Kreises: Variante 2

Eine einfachere Alternative ist, den Einheitskreis in Polarkoordinaten zu beschreiben.

$$B_1^2(0) = \{(r \cos(t), r \sin(t)) \mid 0 \leq r < 1, 0 \leq t < 2\pi\} = \Psi((0, 1) \times [0, 2\pi)) \cup \{0\}$$

Dabei ist Ψ die Abbildung

$$\begin{aligned}\Psi &: (0, \infty] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \Psi(r, t) &:= (r \cos(t), r \sin(t))\end{aligned}$$

Man kann überprüfen, dass Ψ ein C^∞ -Diffeomorphismus ist. Die Substitutionsregel liefert uns also

$$\begin{aligned}|B_1^2(0)| &= \int_{B_1^2(0)} 1 \, dx \\ &= \int_{\Psi^{-1}(B_1^2(0))} 1 \, |\det(D\Psi(r, t))| \, dr dt \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 1 \, \left| \det \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -r \sin(t) & r \cos(t) \end{pmatrix} \right| \, dt dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r \, dt dr \\ &= 2\pi \int_0^1 r \, dr \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_{r=0}^{r=1} \\ &= \pi\end{aligned}$$

Satz von Green

Wir möchten das Kurvenintegral

$$\int_{S^1} X \cdot ds$$

bestimmen.

$$\begin{aligned}X &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ X(x, y) &:= (-y, x)\end{aligned}$$

Wir könnten mühsam die Kurve parametrisieren und das Integral ausrechnen. Viel einfacher ist es aber, den Satz von Green zu verwenden. Der Satz von Green besagt, dass

$$\int_{S^1} X \cdot ds = \int_{B_1^2(0)} \operatorname{rot} X \, dx$$

Die Rotation von $\operatorname{rot} X$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} X &= \partial_x X_2 - \partial_y X_1 \\ &= \partial_x x - \partial_y (-y) \\ &= 1 - (-1) \\ &= 2\end{aligned}$$

Das Integral vereinfacht sich zu

$$\int_{S^1} X \cdot ds = \int_{B_1^2(0)} 2 \, dx = 2 |B_1^2(0)| = 2\pi$$

Wobei wir verwendet haben, dass die Fläche des Einheitskreises $|B_1^2(0)| = \pi$ ist (siehe obiger Abschnitt).