

Übungen Untermannigfaltigkeiten

Aufgabe 1

a) Zeige, dass $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist. Was ist ihre Dimension? Tipp: Satz vom regulären Wert.

b) Berechne den Tangentialraum von S^1 an jedem Punkt $x_0 \in S^1$.

c) Berechne die Tangentialabbildung (Ableitung) von

$$f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := x_1$$

Aufgabe 2

a) Zeige, dass

$$\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \psi(x, y) := (x, y, x^2 + y^2)$$

eine Einbettung ist.

b) Zeige, dass $P := \text{im}(\psi) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\}$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist. Was ist ihre Dimension?

c) Bestimme den Tangentialraum von P an jedem Punkt $p_0 \in P$.