Übungen Untermannigfaltigkeiten

Aufgabe 1

a) Zeige, dass $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist. Was ist ihre Dimension? Tipp: Satz vom regulären Wert.

Lösung:

Wir definieren die Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x) := x_1^2 + x_2^2$$

Dann ist $S^1 = g^{-1}(1)$. Wenn wir zeigen, dass 1 ein regulärer Wert von g ist, dann folgt die Behauptung aus dem Satz vom regulären Wert. 1 ist ein regulärer Wert von g, wenn g für alle $x \in g^{-1}(1)$ eine Submersion ist, also wenn die Jacobi-Matrix von g für alle diese x surjektiv ist.

Wir berechnen also die Jacobi-Matrix:

$$J_g(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \end{pmatrix}$$

Für $x \neq 0$ ist diese Matrix surjektiv, da sie dann Rang 1 hat, also maximalen Rang. Da $0 \notin S^1$ ist, ist 1 ein regulärer Wert von g und folglich S^1 eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$.

b) Berechne den Tangentialraum von S^1 an jedem Punkt $x_0 \in S^1$.

Lösung:

Im Fall, dass eine Untermannigfaltigkeit M als Niveaumenge einer Submersion f definiert ist, d.h.

$$M = f^{-1}(c)$$

dann ist der Tangentialraum an einen Punkt $x_0 \in M$ gegeben durch

$$T_{x_0}M = \ker\big(J_f(x_0)\big)$$

Das ist die Aussage eines Satzes aus der Vorlesung.

Für unseren Fall ist $S^1 = g^{-1}(1)$. Der Tangentialraum an einen Punkt $x \in S^1$ ist also

$$\begin{aligned} T_x S^1 &= \ker\big(J_g(x)\big) \\ &= \{v \in \mathbb{R}^2 \mid J_g(x)v = 0\} \\ &= \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \end{pmatrix} v = 0\} \\ &= \{v \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 v_1 + 2x_2 v_2 = 0\} \\ &= \{v \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 v_1 + x_2 v_2 = 0\} \\ &= \{v \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot v = 0\} \end{aligned}$$

c) Berechne die Tangentialabbildung (Ableitung) von

$$f : S^1 \to \mathbb{R}, \quad f(x) := x_1$$

Lösung:

Um die Tangentialabbildung zu berechnen, erweitern wir die Funktion f zu einer Funktion auf $\mathbb{R}^2$:

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad F(x) := x_1$$

Diese Funktion ist identisch mit f auf S^1. Die Ableitung von F ist

$$\begin{aligned} Df(x)(v) &= J_f(x)v \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \;\; \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\right)v \\ &= (1 \;\; 0)v \\ &= v_1 \end{aligned}$$

Die Tangentialabbildung von f erhalten wir, indem wir die Ableitung DF wieder auf S^1 einschränken:

$$Df(x) : T_x S^1 \to \underbrace{T_{f(x)}\mathbb{R}}_{=\mathbb{R}}, \quad Df(x)(v) = v_1$$

Aufgabe 2

a) Zeige, dass

$$\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \psi(x,y) := (x, y, x^2 + y^2)$$

eine Einbettung ist.

Lösung:

Wir müssen das Folgende zeigen:
- ψ ist injektiv
- ψ ist eine Immersion
- ψ^{-1} ist stetig

ψ ist injektiv:
Seien $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $\psi(x_1, y_1) = \psi(x_2, y_2)$. Dann ist $(x_1, y_1, x_1^2 + y_1^2) = (x_2, y_2, x_2^2 + y_2^2)$. Also $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$.

ψ ist eine Immersion:
Die Ableitung von ψ ist

$$\begin{aligned} D\psi(x,y)(v) &= \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,y) \;\; \frac{\partial \psi}{\partial y}(x,y)\right)v \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2x & 2y \end{pmatrix} v \end{aligned}$$

Die obige Matrix hat maximalen Rang, ist also injektiv. ψ ist demnach eine Immersion.

ψ^{-1} ist stetig:
Die Umkehrfunktion von ψ ist $\psi^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x,y,z) \to (x,y)$, also offensichtlich stetig.

ψ ist ausserdem eine C^∞-Funktion, also ist ψ eine C^∞-Einbettung.

b) Zeige, dass $P := \operatorname{im}(\psi) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\}$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist. Was ist ihre Dimension?

Lösung:

Die Aussage folgt direkt aus dem "Einbettungssatz" aus der Vorlesung. ψ ist eine C^∞-Einbettung, deshalb ist $P = \operatorname{im}(\psi)$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ der Dimension 2.

c) Bestimme den Tangentialraum von P an jedem Punkt $p_0 \in P$.

Lösung:

Wenn eine Untermannigfaltigkeit M als Bild einer Einbettung definiert ist, d.h. $M = \operatorname{im}(f)$, dann ist der Tangentialraum an einen Punkt $x_0 \in M$ gegeben durch $T_{x_0}M = \operatorname{im}(Df(f^{-1}(x_0)))$. In unserem Fall ist $P = \operatorname{im}(\psi)$. Also folgt

$$\begin{aligned}
T_{p_0}P &= \operatorname{im}(D\psi(\psi^{-1}(p_0))) \\
&= \operatorname{im}(D\psi(x_0, y_0)) \\
&= \operatorname{im}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2x_0 & 2y_0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \left\{(v_1, v_2, 2x_0 v_1 + 2y_0 v_2) \in \mathbb{R}^3 \mid v \in \mathbb{R}^2\right\}
\end{aligned}$$