Immersion, Submersion, Einbettung

Definition: (aus dem Skript von Dr. Ziltener)
Sei $x \in U$ ein Punkt, in dem f differenzierbar ist. Wir sagen, dass f im Punkt x eine **Immersion** ist, g.d.w. $Df(x)$ injektiv ist. Wir sagen, dass f im Punkt x eine **Submersion** ist, g.d.w. $Df(x)$ surjektiv ist. Wir sagen, dass f eine **Immersion** / **Submersion** ist, g.d.w. f in jedem Punkt eine Immersion / Submersion ist. Wir nennen f eine C^k-**Einbettung** g.d.w. f injektiv, C^k und eine Immersion ist und $f^{-1} : f(U) \to U$ stetig ist.

Immersion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, f(t) := \begin{pmatrix} t^3 - t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

ist eine Immersion, aber keine Einbettung.

Beweis:

$$Df(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 - 1 \\ 2t \end{pmatrix}$$

ist injektiv, denn für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $Df(t) \neq 0$. Das heisst, $\operatorname{Ker}(Df(t)) = \{0\}$. Also ist $Df(t)$ injektiv für alle $t \in \mathbb{R}$.

f ist keine Einbettung, denn f ist nicht injektiv. Zum Beispiel ist $f(1) = f(-1) = (0, 1)$.

Submersion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, g(x, y) := x$$

ist eine Submersion.

Beweis:

$$Dg(x, y) = (1 \;\; 0)$$

ist surjektiv, denn für jedes $z \in \mathbb{R}$ ist

$$Dg(x, y)(z, 0) = (1 \;\; 0) \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix} = z$$

Alternativ könnte man bemerken, dass der Rang von $Dg(x, y) = 1$ ist für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Einbettung

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, h(t) := \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist eine Einbettung.

Beweis:

h ist eine Immersion:

$$Dh(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist injektiv, denn für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $Dh(t) \neq 0$. Das heisst, $\operatorname{Ker}(Dh(t)) = \{0\}$. Also ist $Dh(t)$ injektiv für alle $t \in \mathbb{R}$.

h ist injektiv:
Seien $t, s \in \mathbb{R}$ mit $h(t) = h(s)$. Dann ist $(t, 0) = (s, 0)$, also $t = s$.

h ist offensichtlich C^∞.

h^{-1} ist stetig:

$$h^{-1} : R \times \{0\} \to \mathbb{R}$$
$$h^{-1}(t, 0) := t$$

Das ist (fast) die Identitäts-Funktion (id), also stetig.