Übungen Taylorentwicklung für Funktionen mehrerer Variablen

Wir erinnern uns an die Definition des Taylorpolynoms für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$T_{f,x_0}^m(x) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|=k}} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x_0)(x-x_0)^\alpha$$

Das Taylorpolynom für eine Funktion mehrerer Variablen sieht ganz ähnlich aus wie für eine Funktion einer Variable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$T_{f,x_0}^m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} f^k(x_0)(x-x_0)^k$$

Der Unterschied ist, dass überall wo vorhin ein $k \in \mathbb{N}_0$ stand, nun ein Multi-Index $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ steht. Wir möchten zuerst diese Multi-Index-Notation repetieren.

Multi-Index-Notation

Mit einem Multi-Index $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ bezeichnen wir eine n-Tupel von natürlichen Zahlen, also $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$. Zum Beispiel ist $\alpha = (2, 1, 0)$ ein Multi-Index in $\mathbb{N}_0^3$. Mit dem Multi-Index α können wir verschiedene Operationen durchführen:

- $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$: Ordnung (Länge) des Multi-Index
- $\alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot ... \cdot \alpha_n!$: Fakultät des Multi-Index
- $\binom{k}{\alpha} = \frac{k!}{\alpha!}$ für $k = |\alpha|$: Multinomialkoeffizient
- $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}$: Potenz von x mit Multi-Index
- $D^\alpha f(x) = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} ... D_n^{\alpha_n} f(x)$: Ableitung von f mit Multi-Index

Seien $\alpha = (2, 1, 0)$, $x = (-1, 2, 4)$ und $f(x) = x_1^2 x_2 x_3^3$. Dann berechnen wir:

$$\begin{aligned}
&|\alpha| = 2 + 1 + 0 = 3 \\
&\alpha! = 2! \cdot 1! \cdot 0! = 2 \\
&\binom{3}{\alpha} = \frac{3!}{2!} = 3 \\
&x^\alpha = x_1^2 x_2 = (-1)^2 \cdot 2 = 2 \\
&D^\alpha f(x) = D_1^2 D_2 f(x) = 2x_3^3
\end{aligned}$$

Taylorentwicklung

Wir möchten nun das Taylorpolynom der Funktion $f(x) = e^x \cos(y)$ um $(x_0, y_0) = (0, 0)$ zur Ordnung $m = 2$ berechnen. Dazu berechnen wir zuerst die partiellen Ableitungen von f bis zur Ordnung $m = 2$:

$$\begin{aligned}
&D_1 f(x, y) = e^x \cos(y) \\
&D_2 f(x, y) = -e^x \sin(y) \\
&D_1^2 f(x, y) = e^x \cos(y) \\
&D_1 D_2 f(x, y) = -e^x \sin(y) \\
&D_2^2 f(x, y) = -e^x \cos(y)
\end{aligned}$$

Diese werten wir an der Stelle $(x_0, y_0) = (0, 0)$ aus:

$$
\begin{aligned}
D_1 f(x_0, y_0) &= e^0 \cos(0) = 1 \\
D_2 f(x_0, y_0) &= -e^0 \sin(0) = 0 \\
D_1^2 f(x_0, y_0) &= e^0 \cos(0) = 1 \\
D_1 D_2 f(x_0, y_0) &= -e^0 \sin(0) = 0 \\
D_2^2 f(x_0, y_0) &= -e^0 \cos(0) = -1
\end{aligned}
$$

Nun können wir das Taylorpolynom berechnen:

$$
\begin{aligned}
T_{f,0}^2(x, y) &= \sum_{k=0}^{2} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^2 \\ |\alpha| = k}} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(0,0) x^\alpha \\
&= f(0,0) \\
&\quad + D_1 f(0,0)x + D_2 f(0,0)y \\
&\quad + \frac{1}{2} D_1^2 f(0,0)x^2 + D_1 D_2 f(0,0)xy + \frac{1}{2} D_2^2 f(0,0)y^2 \\
&= 1 + (x + 0) + \left(\frac{1}{2}x^2 + 0 + \frac{1}{2}(-1)y^2\right) \\
&= 1 + x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2)
\end{aligned}
$$