

Extremwertprobleme in $\mathbb{R}^n$

Kochrezept

Gegeben: $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit Ω offen und $f \in C^2$.

Gesucht: Extremalstellen von f in Ω .

Schritt 1: Finde alle kritischen Punkte von f , d.h. löse

$$df(x) = 0 \quad \text{bzw.} \quad J_f(x) = 0$$

Die Lösungen sind Kandidaten für Extremalstellen von f .

Schritt 2: Um zu entscheiden, ob ein kritischer Punkt x_0 ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt ist, betrachte die Hesse-Matrix von f an x_0 :

$\text{Hess}_f(x_0)$ positiv definit $\Rightarrow x_0$ ist lokales Minimum

$\text{Hess}_f(x_0)$ negativ definit $\Rightarrow x_0$ ist lokales Maximum

$\text{Hess}_f(x_0)$ indefinit $\Rightarrow x_0$ ist Sattelpunkt

Beispiele

Beispiel 1

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) := x^2 + y^2$.

Schritt 1: Wir suchen alle kritischen Punkte von f . Dazu berechnen wir die Jacobi-Matrix von f :

$$J_f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = (2x \quad 2y)$$

Die kritischen Punkte sind jene $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, für die $J_f(x, y) = 0$ gilt. Das ist genau dann der Fall, wenn $x = 0$ und $y = 0$. Also ist $(0, 0)$ der einzige kritische Punkt von f .

Schritt 2: Um zu entscheiden, welche Art von Extremstelle $(0, 0)$ ist, betrachten wir die Hesse-Matrix von f :

$$\text{Hess}_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Hesse-Matrix ist positiv definit, also ist $(0, 0)$ ein lokales Minimum von f . Tatsächlich handelt es sich sogar um ein globales Minimum, da $f(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0 = f(0, 0)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Beispiel 2

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) := x^4 - 2x^2 + y^2 + xy^2$.

Schritt 1: Um die kritischen Punkte von f zu finden, berechnen wir die Jacobi-Matrix von f :

$$J_f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = (4x^3 - 4x + y^2 \quad 2y + 2xy)$$

Die kritischen Punkte erhalten wir durch Lösen des Gleichungssystems $J_f(x, y) = 0$:

$$4x^3 - 4x + y^2 = 0$$

$$2y + 2xy = 0$$

Die zweite Gleichung lässt sich umformen zu $2y(1 + x) = 0$, liefert also die Lösungen $y = 0$ oder $x = -1$.

Falls $y = 0$, wird die erste Gleichung zu $4x^3 - 4x = 0$, also muss $x \in \{-1, 0, 1\}$ sein. Wir erhalten also die kritischen Punkte $(-1, 0)$, $(0, 0)$ und $(1, 0)$.

Falls $x = -1$, wird die erste Gleichung zu $-4 + 4 + y^2 = 0$, also $y = 0$. Wir erhalten also erneut den kritischen Punkt $(-1, 0)$.

Zusammengefasst sind die kritischen Punkte von f also $(-1, 0)$, $(0, 0)$ und $(1, 0)$.

Schritt 2: Wir untersuchen die Hesse-Matrix von f . Die Hesse-Matrix ist

$$\text{Hess}_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 2y \\ 2y & 2 + 2x \end{pmatrix}$$

Nun setzen wir die kritischen Punkte $(-1, 0)$, $(0, 0)$ und $(1, 0)$ ein:

$$\text{Hess}_f(-1, 0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \text{keine Aussage möglich}$$

$$\text{Hess}_f(0, 0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ ist indefinit} \quad \Rightarrow (0, 0) \text{ ist Sattelpunkt}$$

$$\text{Hess}_f(1, 0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ ist positiv definit} \quad \Rightarrow (1, 0) \text{ ist lokales Minimum}$$