# Beispiele Ableitungen in $\mathbb{R}^n$

Wir betrachten im Folgenden die beiden Funktionen

$$
\begin{aligned}
f &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x_1, x_2, x_3) := \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ e^{x_3} \end{pmatrix} \\
g &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1, \quad g(y_1, y_2) := y_1^2 + y_2^3
\end{aligned}
$$

## Partielle Ableitungen

Die partiellen Ableitungen von $f$ und $g$ sind

$$
\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{x_3} \end{pmatrix}
$$

$$
\frac{\partial g}{\partial y_1}(y_1, y_2) = 2y_1, \quad \frac{\partial g}{\partial y_2}(y_1, y_2) = 3y_2^2
$$

## Jacobi-Matrix

Nun, da wir die partiellen Ableitungen berechnet haben, können wir auch die Jacobi-Matrizen bestimmen:

$$
\begin{aligned}
J_f(x_1, x_2, x_3) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{x_3} \end{pmatrix} \\
J_g(y_1, y_2) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial y_1} & \frac{\partial g}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y_1 & 3y_2^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

## Gradient

Der Gradient ist einfach die Transponierte der Jacobi-Matrix:

$$
\begin{aligned}
\nabla f(x_1, x_2, x_3) &= \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{x_3} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ x_1 & 0 \\ 0 & e^{x_3} \end{pmatrix} \\
\nabla g(y_1, y_2) &= \begin{pmatrix} 2y_1 & 3y_2^2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2y_1 \\ 3y_2^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

## Totale Ableitung

Die totale Ableitung (falls sie existiert) ist die Matrixmultiplikation der Jacobi-Matrix mit einem Vektor:

$$
\begin{aligned}
df(x_1, x_2, x_3)(v_1, v_2, v_3) &= J_f(x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 v_1 + x_1 v_2 \\ e^{x_3} v_3 \end{pmatrix} \\
dg(y_1, y_2)(w_1, w_2) &= J_g(y_1, y_2) \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y_1 & 3y_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = 2y_1 w_1 + 3y_2^2 w_2
\end{aligned}
$$

## Kettenregel

Sei $h = g \circ f$.

Die Kettenregel funktioniert ganz analog wie in $\mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
dh(x_1, x_2, x_3) &= d(g \circ f)(x_1, x_2, x_3) \\
&= dg(f(x_1, x_2, x_3)) \circ df(x_1, x_2, x_3)
\end{aligned}
$$

Einfacher ist es, die Jacobi-Matrizen zu multiplizieren:

$$
\begin{aligned}
J_h(x_1, x_2, x_3) &= J_g(f(x_1, x_2, x_3)) \cdot J_f(x_1, x_2, x_3) \\
&= J_g(x_1 x_2, e^{x_3}) \cdot J_f(x_1, x_2, x_3) \\
&= \begin{pmatrix} 2x_1 x_2 & 3e^{2x_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{x_3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2x_1 x_2^2 & 2x_1^2 x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 3e^{3x_3} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$