Potentielle Energie des harmonischen Oszillators in 3D

Wir betrachten ein physikalisches System, das aus einer masselosen Feder besteht, die am Ursprung des Koordinatensystems befestigt ist und an deren anderen Ende eine Punktmasse m hängt, die sich frei in $\mathbb{R}^3$ bewegen kann.

Die Kraft, die auf die Punktmasse wirkt, ist die Federkraft

$$F(x) = -kx$$

mit der Federkonstanten $k \in \mathbb{R}_+$ und der Auslenkung $x \in \mathbb{R}^3$ der Punktmasse aus der Ruhelage. Beachte, dass $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld ist.

Wir wollen im Folgenden beweisen, dass dieses Vektorfeld konservativ ist und ein Potential für das Vektorfeld bestimmen.

Wir gehen vor, wie in der Vorlesung besprochen:

1. Schritt: Wegintegral berechnen

Wir definieren die Funktion

$$\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(x) := \int F d\gamma_x = \int_0^1 F(\gamma_x(s)) \cdot \gamma_x'(s) ds$$

Falls F ein konservatives Vektorfeld ist, dann muss ϕ ein Potential für F sein.

Dabei ist $\gamma_x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Weg, der von $x_0 := 0$ nach x führt, also $\gamma_x(0) = 0$ und $\gamma_x(1) = x$. Es ist ratsam, einen Weg zu wählen, der die Berechnung des Integrals möglichst einfach macht. Wir wählen deshalb den Weg

$$\gamma_x(s) := sx$$

Nun können wir das Wegintegral berechnen:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int_0^1 F(\gamma_x(s)) \cdot \gamma_x'(s) ds \\ &= \int_0^1 (-ksx) \cdot xs ds \\ &= -kx \cdot x \int_0^1 s ds \\ &= -k\|x\|^2 \left[\frac{s^2}{2} \right]_0^1 \\ &= -k\|x\|^2 \left(\frac{1}{2} - 0 \right) \\ &= -\frac{1}{2} k\|x\|^2 \end{aligned}$$

2. Schritt: Gradient bestimmen und mit Vektorfeld vergleichen

Um den Gradienten zu berechnen, benötigen wir zuerst die partiellen Ableitungen von ϕ . Wir erinnern uns, dass die Ableitung der Norm

$$\frac{\partial \|x\|}{\partial x_i}(x) = \frac{x_i}{\|x\|}$$

ist. Wir können also die Kettenregel anwenden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) &= \frac{\partial(-\frac{1}{2}k\|x\|^2)}{\partial x_i} \\ &= -k\|x\| \frac{\partial \|x\|}{\partial x_i} \\ &= -k\|x\| \frac{x_i}{\|x\|} \\ &= -kx_i \end{aligned}$$

Für den Gradienten erhalten wir also

$$\nabla \phi(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_3}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -kx_1 \\ -kx_2 \\ -kx_3 \end{pmatrix} = -kx$$

Um zu entscheiden, ob F konservativ ist, vergleichen wir den Gradienten von ϕ mit F . F ist konservativ genau dann, wenn $\nabla \phi = F$. Das trifft in unserem Fall zu, also ist F konservativ und ein Potential von F ist ϕ . (Das Potential ist nur bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt. D.h. $\phi + C$ ist auch ein Potential von F für jedes $C \in \mathbb{R}$.)

Physikalische Interpretation

Wie man sieht, ist das Potential ϕ , das wir gefunden haben, gerade die Negation der potentiellen Energie des harmonischen Oszillators. Also

$$E_{\text{pot}}(x) = -\phi(x) = \frac{1}{2}k\|x\|^2$$

Tatsächlich gilt das ganz allgemein. Zu jeder konservativen Kraft F gehört ein Potential ϕ und entsprechend eine potentielle Energie E_{pot} . Man könnte noch etwas weiter gehen und beweisen, das in einem physikalischen System, in welchem nur konservative Kräfte wirken, die Gesamtenergie $E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$ erhalten bleibt. Das werden wir aber hier nicht mehr machen.