

Umformen linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen in Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung

Jede lineare gewöhnliche Differentialgleichung n -ter Ordnung lässt sich in ein System von n Differentialgleichungen 1. Ordnung umformen.

Beispiel 1

Betrachte die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\ddot{u} - 2u = 0$$

Definiere $v = \begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \end{pmatrix}$. Dann ist das System von Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$\dot{v} = \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \ddot{u} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \end{pmatrix} = Av$$

äquivalent zur ursprünglichen Differentialgleichung.

Beispiel 2

In ähnlicher Weise können auch inhomogene Differentialgleichungen umgeformt werden.

$$y'''' - 3y'' - y' + 5y = \cos$$

Definiere $z = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix}$. Dann ist das System von Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$z' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y''' \\ y'''' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cos \end{pmatrix}}_{=:b} = Az + b$$

äquivalent zur ursprünglichen Differentialgleichung.